

Extraordinaria suplente de 2022

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

Para que f sea continua en 0, el numerador $e^{\lambda x} - e^x - x$ no puede tener término lineal. Su coeficiente es $\lambda - 2$, de modo que $\lambda = 2$. El coeficiente de x^2 pasa a ser $(\lambda^2 - 1)/2 = 3/2$; por ello, $\mu = 3/2$.

Con $\lambda = 2$, en $x = 1$ se tiene $f(1) = e^2 - e - 1$ y, derivando el cociente, $f'(1) = e + 1$. La tangente es

$$y - (e^2 - e - 1) = (e + 1)(x - 1).$$

Ejercicio 2

El dominio excluye $x = -2$. En ese punto el numerador vale $6 \neq 0$, así que hay asíntota vertical $x = -2$. La división polinómica da

$$f(x) = x - 6 + \frac{21x^2 + 64x + 50}{(x + 2)^3}.$$

El último término tiende a cero, luego la asíntota oblicua es $y = x - 6$; no hay horizontal.

En $x = 0$, $f(0) = 1/4$ y $f'(0) = -3/8$. La pendiente de la normal es $8/3$, por tanto la ecuación de la normal es

$$y = \frac{1}{4} + \frac{8}{3}x.$$

Ejercicio 3

Dividiendo y descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} = 2x + \frac{-1}{x + 2} + \frac{3}{x - 1}.$$

Integrando término a término,

$$x^2 - \ln|x + 2| + 3\ln|x - 1| + C.$$

Ejercicio 4

Las intersecciones de x^2 y $a|x|$ se obtienen de $|x|(|x| - a) = 0$: son $x = 0, \pm a$. Para $|x| < a$, la gráfica de $a|x|$ queda por encima de x^2 . Por simetría, el área total es

$$S = 2 \int_0^a (ax - x^2) dx = \frac{a^3}{3}.$$

Al imponer $S = 9$ y $a > 0$, resulta $a = 3$.

Ejercicio 5

El determinante de la matriz de coeficientes es $-2\alpha(\alpha - 1)$. Si $\alpha \neq 0, 1$, el rango es 3 y la única solución del sistema homogéneo es la trivial. Para $\alpha = 0$ o 1 , el rango es $2 < 3$, así que hay infinitas soluciones no triviales. En particular, para $\alpha = 1$ se obtiene $y = 0$ y $x + z = 0$; una solución no trivial es $\boxed{(-1, 0, 1)}$.

Ejercicio 6

La matriz de coeficientes tiene determinante $(m - 2)(m + 2)$. Para $m \neq \pm 2$, el sistema es SCD. Si $m = 2$, al restar la segunda ecuación de la tercera se obtiene $y + z = 2$, que junto con la segunda da $x = 2$; la primera exigiría $-2 = 2$, por lo que es SI. Si $m = -2$, la primera y tercera ecuaciones tienen el mismo lado izquierdo y términos independientes distintos, también es SI. No hay valores de m con SCI.

Para $m = 1$, el sistema es SCD y la solución es $\boxed{(x, y, z) = (4/3, 1, -1/3)}$.

Ejercicio 7

Los planos paralelos a $2x + y - 2z - 2 = 0$ tienen forma $2x + y - 2z + D = 0$. La distancia es $|D + 2|/3$; al igualarla a 2, se obtiene $D = 4$ o $D = -8$. Así, los planos son

$$\boxed{2x + y - 2z + 4 = 0}, \quad \boxed{2x + y - 2z - 8 = 0}.$$

El plano dado corta los ejes en $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, -1)$. El volumen del tetraedro con vértice en el origen es $|1 \cdot 2 \cdot (-1)|/6 = \boxed{1/3}$.

Ejercicio 8

La recta es $(x, y, z) = (t, 1 - t, t)$, con director $(1, -1, 1)$. Un director de s , intersección de planos con normales $(1, 1, -3)$ y $(3, -1, 1)$, es proporcional a $(1, 5, 2)$. Los directores no son proporcionales. Al sustituir un punto genérico de r en las ecuaciones de s , la primera exige $t = -1$, pero la segunda no se cumple; por tanto, las rectas son alabeadas.

Un normal del plano que contiene a s y es paralelo a r es $(7, 1, -6)$, perpendicular a los dos directores. El punto $(1/2, 7/2, 0)$ pertenece a s , así que el plano es

$$\boxed{7x + y - 6z - 7 = 0}.$$