

PROBLEMA A.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M , donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$. Obtener **razonadamente**:

- Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - kI$ tiene inversa. (2 puntos)
- La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. (2 puntos)
- Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2I$. (4 puntos)
- Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $MP = PM$. (2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad)

Solución:

a) Calculemos la matriz B .

$$B = A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

Para que exista B^{-1} debe ser $|B| \neq 0$.

$$|B| = \begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = -k(3-k) + 2 = -3k + k^2 + 2 = k^2 - 3k + 2$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow k = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto la matriz B tiene inversa para todos los números reales que sean distintos de 1 y 2, es decir $\forall k \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

b) Para $k = 3$, según el resultado del apartado anterior, $\exists B^{-1}$

$$\text{Para } k = 3, B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } |B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Procedamos al cálculo de B^{-1} . Cálculo de los menores: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, adjuntos: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, traspuesta $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$,

$$\text{y finalmente } B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$$\alpha A^2 + \beta A = -2I$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta & 7\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad matricial da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2\alpha = -2 \\ -6\alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \\ 7\alpha + 3\beta = -2 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $\alpha = \frac{-2}{-2} = 1$. Sustituyendo este valor en la otras tres ecuaciones:

$$\begin{cases} -6 - 2\beta = 0 \\ 3 + \beta = 0 \\ 7 + 3\beta = -2 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $-2\beta = 6 \rightarrow \beta = \frac{6}{-2} = -3$

De la segunda ecuación: $\beta = -3$

Y de la tercera: $3\beta = -2 - 7 \rightarrow 3\beta = -9 \rightarrow \beta = \frac{-9}{3} = -3$

Como de las tres ecuaciones obtenemos el mismo valor de β , $\beta = -3$

Las constantes reales para las que se verifica la ecuación planteada son: $\alpha = 1$ y $\beta = -3$.

d) $P = I - M$ y $M / M^2 = M$.

¿ $P^2 = P$?

$$P^2 = (I - M)(I - M) = I - IM - MI + MM = I - M - M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$$

(como I es la matriz identidad: $II = I$, $IM = M$, $MI = M$)

¿ $MP = PM$?

$$MP = M(I - M) = MI - MM = M - M^2 = M - M = 0 \quad (M - M \text{ es la matriz cero})$$

$$PM = (I - M)M = IM - MM = M - M^2 = M - M = 0$$

Por lo tanto, $MP = PM$

PROBLEMA A.2. En el espacio se dan las rectas

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 2 + \alpha = 0 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

- El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. (4 puntos)
- La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. (2 puntos)
- La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto $(1, 2, 1)$. (4 puntos)

Solución:

Previamente vamos a obtener los vectores directores de ambas rectas.

Como la ecuación de la recta r está dada en forma paramétrica, sabemos que $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$

A partir de la ecuación de la recta s , dada como intersección de dos planos, obtengamos la forma paramétrica. Para ello de la primera ecuación despejamos la x y de la segunda la z :

$$s: \begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = 2 + \alpha + 3y \end{cases} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = \mu \\ z = 2 + \alpha + 3\mu \end{cases} \quad \text{por lo tanto} \quad \vec{v}_s = (-2, 1, 3)$$

- a) Las rectas r y s estarán contenidas en un plano si son paralelas o se cortan en un punto.

Veamos si son paralelas, ¿son proporcionales sus vectores directores? $\frac{1}{-2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$?

Como $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$ entonces los vectores no son proporcionales, las rectas no son paralelas.

En consecuencia las rectas r y s deben cortarse.

Para que se corten el siguiente sistema debe tener solución,

$$\begin{cases} 3 + \lambda = 1 - 2\mu \\ -1 + 2\lambda = \mu \\ 2 + \lambda = 2 + \alpha + 3\mu \end{cases}$$

Arreglamos el sistema considerando que las incógnitas son λ y μ ,

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = -2 \\ 2\lambda - \mu = 1 \\ \lambda - 3\mu = \alpha \end{cases} \quad \text{Por ser un sistema de 2}$$

incógnitas y 3 ecuaciones, para que tenga solución el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\alpha + 12 + 2 - 2 + 3 - 4\alpha = 0 \rightarrow -5\alpha + 15 = 0 \rightarrow -5\alpha = -15 \rightarrow \alpha = \frac{-15}{-5} = 3$$

Por lo tanto, para $\alpha = 3$ las rectas r y s están contenidas en un plano.

- b) $\alpha = 3$. Busquemos el punto de corte entre r y s resolviendo el sistema del apartado anterior.

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = -2 \\ 2\lambda - \mu = 1 \\ \lambda - 3\mu = \alpha \end{cases} \quad \text{, como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(obtenido en el apartado anterior), el sistema}$$

es compatible y determinado. Resolvemos el sistema usando las ecuaciones primera y segunda (las que aportan el menor de orden 2 no nulo):

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = -2 \\ 2\lambda - \mu = 1 \end{cases} \quad \text{, resolvámoslo por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2:} \quad \begin{cases} \lambda + 2\mu = -2 \\ 4\lambda - 2\mu = 2 \end{cases} \quad \text{sumando}$$

ambas ecuaciones: $5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$.

Sustituyendo este valor de λ en la recta r obtendremos, P , el punto de corte buscado,
$$\begin{cases} x = 3 + 0 = 3 \\ y = -1 + 2 \cdot 0 = -1, \text{ luego} \\ z = 2 + 0 = 2 \end{cases}$$

$P(3, -1, 2)$.

La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s viene determinada por el punto P y los vectores directores de r y s , $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$. La ecuación de este plano será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ desarrollando por la primera fila: } (x-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{calculando los menores: } & (x-3)(6-1) - (y+1)(3+2) + (z-2)(1+4) = 0 \\ & 5(x-3) - 5(y+1) + 5(z-2) = 0, \text{ simplificando entre 5,} \\ & (x-3) - (y+1) + (z-2) = 0 \\ & x-3-y-1+z-2 = 0 \\ & x-y+z-6 = 0 \end{aligned}$$

Solución: la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para $\alpha = 3$ es $x - y + z - 6 = 0$

c) Buscamos un plano $\pi / \pi \perp r$ y $(1, 2, 1) \in \pi$

$$\text{Como } \pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, 1)$$

La ecuación del plano π será: $x + 2y + z + D = 0$

$$\text{Como debe contener al punto } (1, 2, 1), \quad 1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \rightarrow 1 + 4 + 1 + D = 0 \rightarrow 6 + D = 0 \rightarrow D = -6$$

Finalmente, el plano π será: $x + 2y + z - 6 = 0$

PROBLEMA A.3. Dada la función f definida por

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

- El dominio y el recorrido de la función f . (2 puntos)
- Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f . (2 puntos)
- Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. (2 puntos)
- La gráfica de la curva $y = x^2 e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio:

Tanto x^2 como e^{-x} se pueden calcular para cualquier número real x , por lo que $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

Recorrido:

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ y $e^{-x} > 0 \Rightarrow x^2 e^{-x} \geq 0$. Por lo que $\text{Im } f(x) = [0, +\infty)$

b) Calculemos $f'(x)$,

$$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x}$$

Igualamos la primera derivada a cero para buscar los posibles extremos de $f(x)$

$$(2x - x^2) e^{-x} = 0$$

$$\text{como } e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Calculemos la segunda derivada para determinar si para estos valores de x $f(x)$ alcanza un extremo relativo.

$$f''(x) = (2 - 2x) e^{-x} + (2x - x^2) e^{-x}(-1) = (2 - 2x) e^{-x} - (2x - x^2) e^{-x} = (2 - 2x - 2x + x^2) e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$$

$$x = 0, \quad f''(0) = 2 e^0 = 2 > 0 \rightarrow \text{mínimo relativo}$$

$$x = 2, \quad f''(2) = (4 - 8 + 2) 2 e^{-2} = -2 e^{-2} < 0 \rightarrow \text{máximo relativo}$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ alcanza el máximo relativo en $x = 2$ y el mínimo relativo en $x = 0$.

Calculemos los puntos correspondientes para usarlos en el apartado e):

$$\text{para } x = 0, \quad f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \rightarrow \text{en } (0, 0) \text{ mínimo relativo}$$

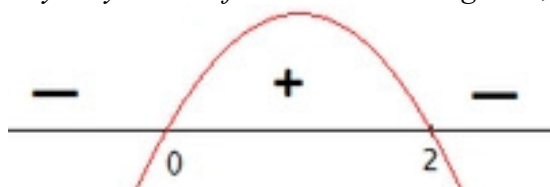
$$\text{para } x = 2, \quad f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = 4 e^{-2} \rightarrow \text{en } (2, 4 e^{-2}) \approx (2, 0.5413) \text{ máximo relativo}$$

c) Monotonía.

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$.

Por lo calculado en el apartado anterior sabemos que $f'(x) = (2x - x^2) e^{-x}$ y $f'(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, el signo de $f'(x)$ depende de $(2x - x^2)$ que es un polinomio de 2º grado cuyas raíces son 0 y 2 y con coeficiente de x^2 negativo, luego el signo de $f'(x)$ es:



Por lo tanto:

$f(x)$ es creciente en $(0, 2)$ y

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

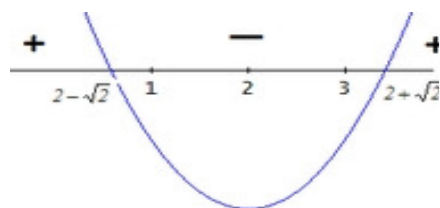
d) Puntos de inflexión.

Debemos estudiar el signo de la segunda derivada.

Del apartado b) sabemos que: $f''(x) = (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$

En $f''(x)$ el factor e^{-x} es siempre positivo, luego el signo de $f''(x)$ depende del otro factor que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y cuyas raíces son:

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$



El signo de $f''(x)$ será:

Luego en $x = 2 - \sqrt{2}$ y $x = 2 + \sqrt{2}$ hay puntos de inflexión porque en ellos la segunda derivada cambia de signo.

e) Por los cálculos realizados en los apartados anteriores, de la curva $y = x^2 e^{-x}$ conocemos: dominio, imagen, monotonía y extremos relativos. Para completar su representación obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su asíntotas.

Puntos de corte:

Para $x = 0$ (calculado en el apartado b)) $y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Para $y = 0 \rightarrow 0 = x^2 e^{-x} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ e^{-x} = 0, \text{ sin solución pues } e^{-x} \neq 0 \end{cases} \rightarrow (0, 0)$

Asíntotas:

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$ no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

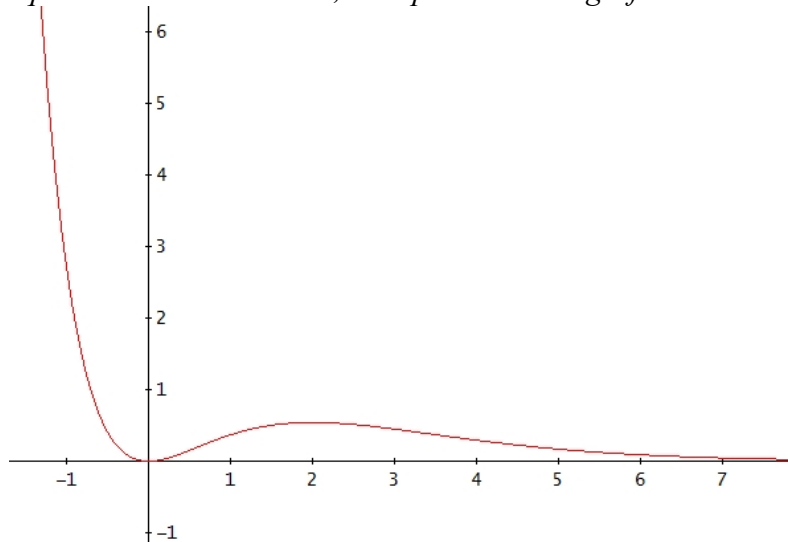
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)$ (indeterminado). Como e^x es infinito de orden superior a x^2 entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x}) = (-\infty)^2 e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = (+\infty)$$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. Como $f(x) \geq 0$ (visto en apartado a)) la posición de la curva respecto de la asíntota será:

Con la información que tenemos de la curva, su representación gráfica será:



PROBLEMA B.1. Se dan las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y T , y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

- a) $\frac{1}{2}T$ (3 puntos)
- b) M^4 . (3 puntos)
- c) $T M^3 T^{-1}$. (4 puntos)

Solución:

$$a) \det\left(\frac{1}{2}T\right) = (\text{como } T \text{ es } 3 \times 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det(T) = \frac{1}{8} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$b) \det(M^4) = (\text{como } \det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)) = [\det(M)]^4$$

Calculemos $\det(M)$,

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = F_1 + F_3 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix} \text{desarrollando por} \\ \text{la tercera columna} \end{matrix} \right) = -1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(6 - 12) = -(-6) = 6$$

$$\text{Por lo que } \det(M^4) = 6^4 = 1296$$

$$c) \text{ Considerando que } \det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)} \text{ y que } \det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

$$\det(T M^3 T^{-1}) = \det(T) \det(M^3) \det(T^{-1}) = \det(T) [\det(M)]^3 \frac{1}{\det(T)} = [\det(M)]^3 = 6^3 = 216$$

PROBLEMA B.2. Se da la recta

$$r: \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{ y el plano } \pi_\alpha: (2 + 2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0, \text{ dependiente del parámetro real } \alpha.$$

Obtener **razonadamente**:

- La ecuación del plano π_α que pasa por el punto $(1, 1, 0)$. (3 puntos)
- La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta r . (4 puntos)
- La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r (3 puntos).

*Solución:*a) Como el punto $(1, 1, 0)$ pertenece al plano π_α :

$$(2 + 2\alpha) \cdot 1 + 1 + \alpha \cdot 0 - 2 - 6\alpha = 0$$

$$2 + 2\alpha + 1 - 2 - 6\alpha = 0$$

$$-4\alpha + 1 = 0$$

$$-4\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Por lo que la ecuación del plano pedido será:

$$\left(2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right)x + y + \frac{1}{4}z - 2 - 6 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)x + y + \frac{1}{4}z - 2 - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{5}{2}x + y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{2} = 0$$

$$10x + 4y + z - 14 = 0$$

Solución: $\pi_\alpha: 10x + 4y + z - 14 = 0$ b) Como π_α debe ser paralelo a la recta r , $\vec{n}_{\pi_\alpha} \perp \vec{v}_r$

$$\vec{n}_{\pi_\alpha} = (2 + 2\alpha, 1, \alpha)$$

Calculemos el vector director de la recta r , $\vec{v}_r$

$$\text{Como } r: \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (4, 1, 1)$$

$$\text{Puesto que debe ser } \vec{n}_{\pi_\alpha} \perp \vec{v}_r \rightarrow (4, 1, 1) \cdot (2 + 2\alpha, 1, \alpha) = 0$$

$$8 + 8\alpha + 1 + \alpha = 0; \quad 9 + 9\alpha = 0; \quad 9\alpha = -9; \quad \alpha = \frac{-9}{9} = -1$$

Sustituyendo el valor de α en el plano π_α :

$$(2 + 2 \cdot (-1))x + y + (-1)z - 2 - 6(-1) = 0$$

$$(2 - 2)x + y - z - 2 + 6 = 0$$

$$y - z + 4 = 0$$

La ecuación del plano π_α será: **$y - z + 4 = 0$**

c) Como π_α debe ser perpendicular a la recta r , $\vec{n}_{\pi_\alpha} \parallel \vec{v}_r$

$$\text{Por lo tanto debe cumplirse: } \frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1} \rightarrow \begin{cases} \frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} \rightarrow 2+2\alpha=4 \rightarrow 2\alpha=2 \rightarrow \alpha=1 \\ \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1} \rightarrow \alpha=1 \end{cases}$$

Luego $\alpha = 1$

Sustituyendo el valor de α en el plano π_α :

$$(2 + 2 \cdot 1) x + y + 1 \cdot z - 2 - 6 \cdot 1 = 0$$

$$4x + y + z - 8 = 0$$

$$4x + y + z - 8 = 0$$

La ecuación del plano π_α será: $4x + y + z - 8 = 0$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA B.3. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6 . Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto $(0, 9)$ al punto (x, y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

- La expresión de $f(x)$. (2 puntos)
- Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. (2 puntos)
- Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. (2 puntos)
- El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. (4 puntos)

Solución:

Veamos la representación gráfica del problema.

Representemos la parábola $2y = 36 - x^2$

$$y = \frac{36 - x^2}{2}$$

$$x = 0 \rightarrow y = 18$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{36 - x^2}{2} = 0$$

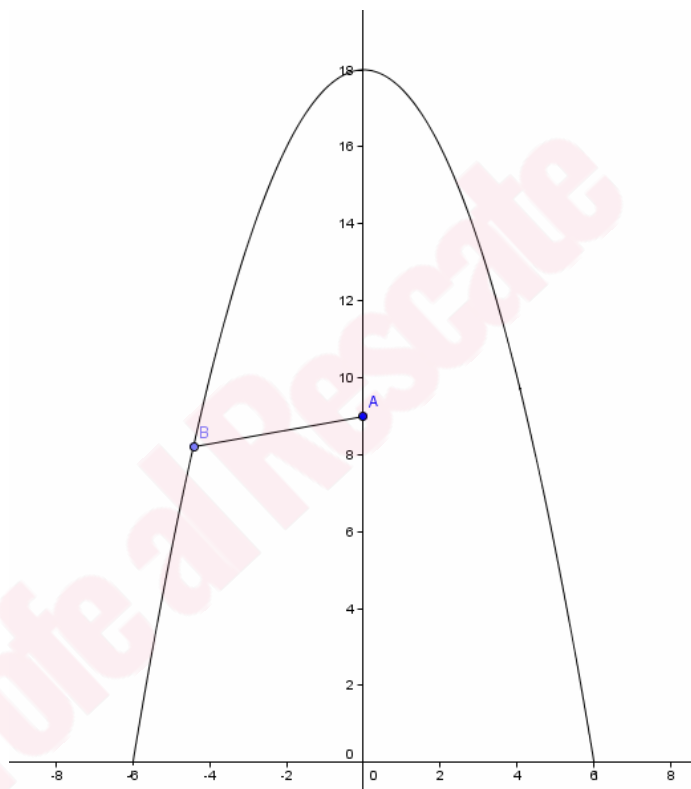
$$36 - x^2 = 0$$

$$36 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

Como los puntos de corte con el eje OX son simétricos respecto del $(0,0)$, el vértice de la parábola está en $x = 0$

El punto A es el $(0, 9)$ y el B uno cualquiera de la parábola.



a) $f(x) = d((0,9), (x,y))$ siendo (x,y) un punto del arco de parábola Γ , luego $y = \frac{36 - x^2}{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= d((0,9), (x,y)) = d\left((0,9), \left(x, \frac{36 - x^2}{2}\right)\right) = \sqrt{(0-x)^2 + \left(9 - \frac{36 - x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{18 - 36 + x^2}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2 - 18}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4 - 36x^2 + 324}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 36x^2 + 324}{4}} = \sqrt{\frac{x^4 - 32x^2 + 324}{4}} = \frac{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Luego } f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}{2} \quad x \in [-6, 6]$$

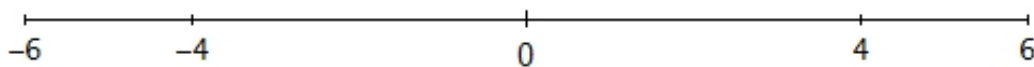
Veamos como es el radicando, $x^4 - 32x^2 + 324 = (x^2)^2 - 2 \cdot 16 \cdot x^2 + 16^2 + 68 = (x^2 - 16)^2 + 68$
Por lo tanto $x^4 - 32x^2 + 324$ es siempre positivo.

b) Para buscar los mínimos relativos de $f(x)$ estudiemos la monotonía de $f(x)$. Debemos estudiar el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{4x^3 - 64x}{2\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = \frac{4x^3 - 64x}{4\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = \frac{x^3 - 16x}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3 - 16x}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = 0 \rightarrow x^3 - 16x = 0 \rightarrow x(x^2 - 16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 16 = 0; x^2 = 16; x = \pm 4 \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos,

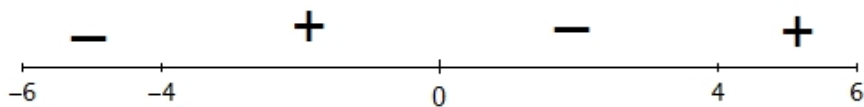


En $f'(x)$ el denominador es la raíz cuadrada de una expresión que siempre es positiva (visto en el apartado anterior), luego no aporta signo a $f'(x)$; por lo tanto el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador, $x^3 - 16x$, polinomio de tercer grado con tres raíces reales (0, -4 y 4), esto quiere decir que en los intervalos indicados el signo del polinomio va alternando.

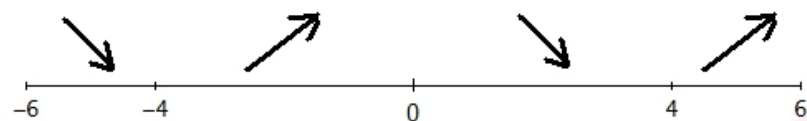
Veamos su signo, por ejemplo, para $x = 1$

$$x = 1 \rightarrow 1^3 - 16 \cdot 1 = 1 - 16 = -15 < 0$$

luego:



y la monotonía será:



Es decir que $f(x)$ tiene dos mínimos relativos en $x = -4$ y en $x = 4$.

Y los puntos del arco Γ correspondientes son:

$$x = -4 \rightarrow y = \frac{36 - (-4)^2}{2} = \frac{36 - 16}{2} = 10$$

$$x = 4 \rightarrow y = \frac{36 - 4^2}{2} = \frac{36 - 16}{2} = 10$$

Finalmente, los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos son $(-4, 10)$ y $(4, 10)$

c) Valores máximo y mínimo de $f(x)$.

Según lo estudiado en el apartado anterior $f(x)$ cumple, en relación a su crecimiento y decrecimiento,



Además, $f(x)$ es una función continua definida en un intervalo cerrado. Luego sus extremos absolutos se alcanzarán en los extremos relativos o en los extremos del intervalo. Veámoslo:

$$x = -4 \rightarrow f(-4) = \frac{\sqrt{(-4)^4 - 32 \cdot (-4)^2 + 324}}{2} = \frac{\sqrt{68}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \approx 4'1231$$

Mínimos relativos de $f(x)$:

$$x = 4 \rightarrow f(4) = \frac{\sqrt{4^4 - 32 \cdot 4^2 + 324}}{2} = \frac{\sqrt{68}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \approx 4'1231$$

$$\text{Máximo relativo de } f(x): x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{\sqrt{0^4 - 32 \cdot 0^2 + 324}}{2} = \frac{\sqrt{324}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

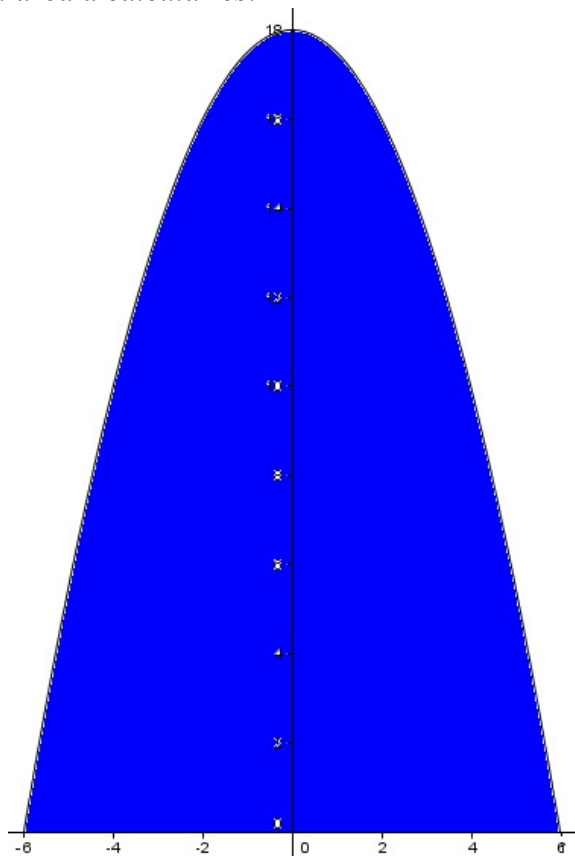
$$x = -6 \rightarrow f(-6) = \frac{\sqrt{(-6)^4 - 32 \cdot (-6)^2 + 324}}{2} = \frac{\sqrt{468}}{2} = \frac{2\sqrt{117}}{2} = \sqrt{117} \approx 10'8167$$

Extremos el intervalo:

$$x = 6 \rightarrow f(6) = \frac{\sqrt{6^4 - 32 \cdot 6^2 + 324}}{2} = \frac{\sqrt{468}}{2} = \frac{2\sqrt{117}}{2} = \sqrt{117} \approx 10'8167$$

Y finalmente, el valor máximo de $f(x)$ es $\sqrt{117}$ y el mínimo es $\sqrt{17}$.

d) El área a calcular es:



Este área la calculamos mediante la siguiente integral definida:

$$\begin{aligned}\int_{-6}^6 \left(\frac{36 - x^2}{2} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-6}^6 (36 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[36x - \frac{x^3}{3} \right]_{-6}^6 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(36 \cdot 6 - \frac{6^3}{3} \right) - \left(36 \cdot (-6) - \frac{(-6)^3}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[216 - \frac{216}{3} + 216 - \frac{216}{3} \right] = \frac{1}{2} \left[432 - \frac{432}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1296 - 432}{3} = \frac{1}{2} \frac{864}{3} = 144\end{aligned}$$

El área pedida mide 144 u^2 .