

Modelo 3 de 2004

Integrales, derivabilidad, discusión de sistemas y geometría analítica.

Opción A - Ejercicio 1

Factorizamos el denominador y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right).$$

En $[-2, 0]$ no hay singularidades. Integramos y evaluamos en los extremos:

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} [\ln |x-1| - \ln |x+3|]_{-2}^0 = \boxed{-\frac{1}{2} \ln 3}.$$

Opción A - Ejercicio 2

La función es derivable en $x = 0$, así que primero debe ser continua allí. Igualamos el límite por la izquierda con $f(0) = \sqrt{1} = 1$, y obtenemos $c = 1$. Las derivadas laterales son

$$f'_-(x) = 4x - \frac{1}{2}, \quad f'_+(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

En $x = 0$ ambas valen $-1/2$, por lo que la función efectivamente es derivable. Su derivada queda

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Para que la tangente sea paralela a $y = -x$, su pendiente debe ser -1 . En el tramo izquierdo,

$$4x - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{8}, \quad f(x) = \frac{35}{32},$$

y la tangente es $y = -x + \frac{31}{32}$. En el tramo derecho,

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}, \quad f(x) = \frac{1}{2},$$

y la tangente es $y = -x + \frac{5}{4}$. **Opción A - Ejercicio 3**

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Restando la tercera ecuación de la segunda,

$$(\lambda - 1)z = -\lambda - 1.$$

Si $\lambda = 1$, queda $0 = -2$, luego el sistema es incompatible. Si $\lambda = -1$, las ecuaciones primera y tercera coinciden y la segunda obliga a $z = 0$; queda una variable libre. En los demás casos, $\det A = -(\lambda - 1)(1 - \lambda^2) \neq 0$, por lo que hay solución única. La clasificación es

$\lambda = 1 :$	SI,
$\lambda = -1 :$	SCI,
$\lambda \neq \pm 1 :$	SCD.

Para $\lambda = -1$, $x - y = -1$ y $z = 0$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (t, t + 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Una recta perpendicular al plano $z = 0$ tiene dirección normal a dicho plano, es decir, $(0, 0, 1)$. El punto de r tiene forma $(u, u, 2)$ y el de s , $(v, 1 - v, 3)$. Para que ambos estén sobre una misma recta vertical deben coincidir sus coordenadas x, y :

$$u = v = 1 - v \Rightarrow u = v = \frac{1}{2}.$$

La recta pedida, en forma paramétrica, es

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) + t(0, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio del intervalo es $[0, 2\pi]$. Derivamos usando la regla del producto:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cos x.$$

Como $e^x > 0$, el signo depende de $\cos x$. Por ello f crece en $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$, y decrece en $(\pi/2, 3\pi/2)$. Los extremos interiores son

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \quad (\text{máximo local}), \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e^{3\pi/2} \quad (\text{mínimo local}).$$

Comparando también los extremos del dominio, $f(0) = 1$ y $f(2\pi) = e^{2\pi}$. El máximo absoluto está en $x = 2\pi$ y el mínimo absoluto en $x = 3\pi/2$. **Opción B - Ejercicio 2**

Integramos por partes en el término xe^{2x} :

$$\int (x - 1)e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) + C.$$

Si $F(1) = e^2$, entonces $-e^2/4 + C = e^2$, de donde $C = 5e^2/4$. La primitiva pedida es

$$F(x) = e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) + \frac{5e^2}{4}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sea a, b, c el número de botellas de zumo de los tipos A, B, C . Los dos ingresos descritos dan el sistema

$$\begin{cases} a + 3b + 4c = 20, \\ a + 3b + 6c = 25. \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda se obtiene $2c = 5$, así que $c = 5/2$. Al sustituir en la primera,

$$a + 3b = 10.$$

Por tanto, las soluciones reales son

$$(a, b, c) = (10 - 3t, t, 5/2),$$

con t libre (y restringido a valores que hagan positivas las dos primeras cantidades si se consideran cantidades positivas). Sin embargo, $c = 5/2$ no es un número entero de botellas. Por ello los datos del enunciado no son compatibles con un inventario real de botellas enteras y positivas, y no se puede determinar una cantidad válida para cada tipo. **Opción B - Ejercicio 4**

Sean $A = (1, 0, -1)$ y $d = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 4)$. La distancia del origen a la recta es

$$d(O, r) = \frac{|A \times d|}{|d|}.$$

Como $A \times d = (-1, -5, -1)$ y $|d| = \sqrt{18}$,

$$d(O, r) = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

En el paralelogramo, $\overrightarrow{CD} = -d$. La condición de que la recta CD pase por el origen implica que C y D están en una recta paralela a d que pasa por el origen. El área es $|d \times (C - B)|$; el componente de C paralelo a d no altera el producto vectorial, de modo que basta calcular $|d \times B|$:

$$d \times B = (1, 5, 1), \quad \text{Área} = \sqrt{1 + 25 + 1} = 3\sqrt{3}.$$