

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + a y + 2 z = a \\ 2 x + a y - z = 2 \\ a x - y + 2 z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro real a . Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La solución del sistema cuando $a = 2$. (4 puntos)
- Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos)
- El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a . (2 + 2 puntos)

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2a - 4 - a^2 - 2a^2 + 1 - 4a = -3a^2 - 6a - 3$$

$$-3a^2 - 6a - 3 = 0 \rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \rightarrow (a+1)^2 = 0 \rightarrow a+1 = 0 \rightarrow a = -1$$

Entonces,

para $a \neq -1$, $|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ y, como el máximo rango de A' es 3, $\text{ran}(A') = 3$, por lo que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

para $a = -1$, $|A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A' podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2×3 , el máximo rango de A será 2),

$$\left. \begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = 1 + 2 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como el máximo rango de A' también sería 2 (A' es 2×4) $\rightarrow \text{ran}(A') = 2$

Por tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Respondamos a las preguntas,

a) Solución para $a = 2$

Si $a = 2$, $a \neq -1$, por lo que el sistema es compatible determinado

El sistema es
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$
 Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8 - 4 - 4 - 8 - 2 - 8}{-4 - 4 - 4 - 8 + 1 - 8} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-4 + 8 - 4 - 8 - 2 - 8}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-4 - 4 + 8 - 8 - 2 - 8}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

Para $a = 2$ la solución del sistema es: $\{x = y = z = \frac{2}{3}\}$

b) Según lo estudiado al principio el sistema es compatible determinado para $a \neq -1$.

c) Según lo estudiado al principio el sistema es compatible indeterminado para $a = -1$.

Del estudio realizado anteriormente, para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y (las que determinan el menor de orden dos no nulo).

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x - y = -1 - 2z \\ 2x - y = 2 + z \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ 2+z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1+2z+2+z}{3} = \frac{3+3z}{3} = 1+z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2-z+2+4z}{3} = \frac{3z}{3} = z \end{aligned}$$

Finalmente, para $a = -1$ las soluciones del sistema son:
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA A.2. Se dan el punto $P = (1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano

$\pi: x + y + z = 1$ Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, las ecuaciones de:

- El plano que contiene al punto P y a la recta r . (2 puntos)
- La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π . (2+2+2 puntos)
- El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (2 puntos)

Solución:

a) ¿Plano σ ? / $P \in \sigma$ y $r \subset \sigma$

Obtenemos la ecuación paramétrica de r (para tener punto y vector director de r).

En la recta r , $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$

Por tanto resolvemos el sistema: $r: \begin{cases} x + y = -1 + z \\ x + 2y = 1 + z \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1+z & 1 \\ 1+z & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-2+2z-1-z}{1} = -3+z$$

$$\rightarrow r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \rightarrow$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1+z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{1} = 1+z+1-z = 2$$

$$\rightarrow r: \begin{cases} P_r(-3, 2, 0) \\ \vec{v}_r(1, 0, 1) \end{cases}$$

El punto $P(1, 1, 1) \notin r$ (segunda coordenada $\neq 2$), luego podemos construir el plano pedido.

$$\sigma: \begin{cases} \text{punto } P(1, 1, 1) \\ \text{vectores directores: } \begin{cases} \vec{v}_r(1, 0, 1) \\ \vec{PP}_r(4, -1, 1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación general del plano σ la obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot 1 - (y-1) \cdot (-3) + (z-1) \cdot (-1) = 0$$

$$x-1+3y-3-z+1=0$$

$$x+3y-z-3=0$$

Solución: $\sigma: x + 3y - z - 3 = 0$

b)

b₁) ¿recta s? / $P \in s$ y $s \perp \pi$

$$s: \begin{cases} \text{punto } P(1, 1, 1) \\ \text{vector director, como } s \perp \pi \rightarrow: \vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$\text{La ecuación paramétrica de la recta } s \text{ será: } s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b₂) ¿d(P, π)? $P(1, 1, 1)$ y $\pi: x + y + z = 1 \rightarrow \pi: x + y + z - 1 = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow d(P, \pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ u.l.}$$

b₃) ¿s ∩ π?

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación paramétrica de la recta r en la ecuación del plano π,

$$1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 1$$

$$3 + 3\lambda = 1$$

$$3\lambda = 1 - 3$$

$$3\lambda = -2$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}$$

$$Q = s \cap \pi$$

$$\rightarrow Q = \left(1 - \frac{2}{3}, 1 - \frac{2}{3}, 1 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Solución: } s \cap \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

c) ¿Plano σ? / $r \subset \sigma$ y $\sigma \perp \pi$

$$\sigma: \begin{cases} \text{punto } P_r(-3, 2, 0) \\ \text{vectores directores: } \begin{cases} r \subset \sigma \rightarrow \vec{u} = \vec{v}_r(1, 0, 1) \\ \sigma \perp \pi \rightarrow \vec{v} = \vec{n}_\pi(1, 1, 1) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{La ecuación general del plano } \sigma \text{ la obtenemos: } \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+3) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+3) \cdot (-1) - (y-2) \cdot 0 + z \cdot 1 = 0$$

$$-x - 3 + z = 0$$

$$-x + z - 3 = 0$$

$$\text{Solución: } \sigma: -x + z - 3 = 0$$

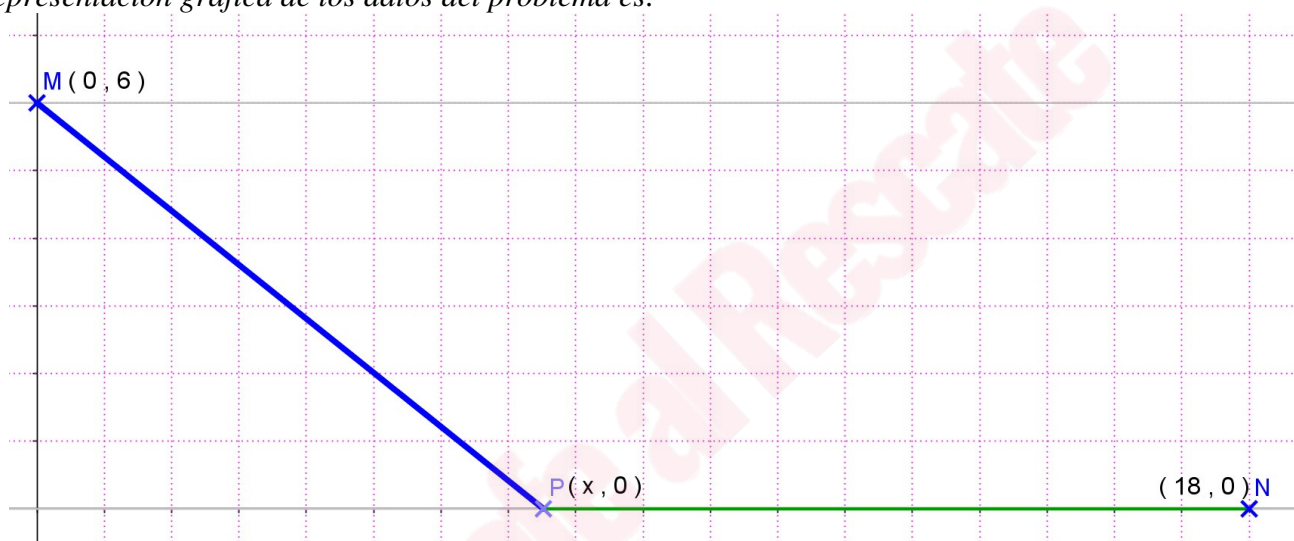
PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P , situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N . Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P , cuando $0 \leq x \leq 18$. (3 puntos)
- El valor de x , con $0 \leq x \leq 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 puntos)
- El valor de dicho costo total mínimo. (3 puntos)

Solución:

La representación gráfica de los datos del problema es:



- a) Coste de los dos cables en función del valor x del punto P .

Sabemos que $0 \leq x \leq 18$,

$$d(M, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2 + 36}$$

$$d(P, N) = 18 - x$$

Por lo que el coste C de los cables será: $C = 10\sqrt{x^2 + 36} + 5(18 - x) \quad 0 \leq x \leq 18$

- b) Mínimo de C .

$$C' = 10 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5$$

$$C' = 0 \rightarrow \frac{10x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 = 0 \rightarrow 10x - 5\sqrt{x^2 + 36} = 0 \rightarrow 10x = 5\sqrt{x^2 + 36}$$

$$(10x)^2 = (5\sqrt{x^2 + 36})^2 \rightarrow 100x^2 = 25(x^2 + 36) \rightarrow 100x^2 = 25x^2 + 900$$

$$100x^2 - 25x^2 = 900 \rightarrow 75x^2 = 900 \rightarrow x^2 = \frac{900}{75} \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Pero como $0 \leq x \leq 18$, entonces $x = \sqrt{12} \approx 3.4641$

Para determinar si es mínimo calculemos los valores de C' a la izquierda y derecha de $\sqrt{12}$

$$x = 1, \quad C' = \frac{10 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 36}} - 5 = \frac{10}{\sqrt{37}} - 5 = -3'3560 < 0$$

$$x = 5, \quad C' = \frac{10 \cdot 5}{\sqrt{5^2 + 36}} - 5 = \frac{50}{\sqrt{61}} - 5 = 1'4018 > 0$$

Hemos obtenido que a la izquierda de $\sqrt{12}$ C' es negativa y a la derecha positiva, por lo que para $x = \sqrt{12}$ la función C tiene un mínimo relativo que además es el absoluto porque C es decreciente a la izquierda de $\sqrt{12}$ y creciente a la derecha.

Por tanto, **el coste total C es mínimo para $x = \sqrt{12} \text{ m} \approx 3'4641 \text{ m}$.**

c) El valor del coste total mínimo será:

$$C = 10 \sqrt{(\sqrt{12})^2 + 36} + 5(18 - \sqrt{12}) = 10 \sqrt{12 + 36} + 5(18 - \sqrt{12}) = 141'9615$$

Por lo que, **el coste total mínimo es de 141'96 €.**

Tu Prof te al Rescate

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz

identidad de orden 3×3 ,
y el valor de la matriz C^4 .

(2,5 puntos)

(2,5 puntos)

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 . (3 puntos)

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B B = B$. (2 puntos)

Solución:

a) *Comprobemos que $C^2 = 2C - I$.*

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 & -5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 & -2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 & -4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el mismo resultado; por lo tanto queda comprobado que $C^2 = 2C - I$.

Calculemos C^4 ,

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = (2C - I) \cdot (2C - I) = 2C \cdot 2C - 2C \cdot I - I \cdot 2C + I^2 = 4C^2 - 2C - 2C + I =$$

$$= 4C^2 - 4C + I = 4(2C - I) - 4C + I = 8C - 4I - 4C + I = 4C - 3I =$$

$$4C - 3I = 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = -1$ y A es 4×4

Calculemos $|(3A^4)(4A^2)^{-1}|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{y} \quad |nA| = n^4 |A| \quad (\text{por ser } A \text{ } 4 \times 4)$$

$$\begin{aligned} \left| (3 A^4)(4 A^2)^{-1} \right| &= \left| 3 A^4 \right| \left| (4 A^2)^{-1} \right| = 3^4 |A^4| \frac{1}{\left| (4 A^2) \right|} = 3^4 |A|^4 \frac{1}{4^4 |A^2|} = 81 \cdot (-1)^4 \frac{1}{256 |A^2|} = \frac{81}{256 |A|^2} = \\ &= \frac{81}{256 (-1)^2} = \frac{81}{256} \end{aligned}$$

Solución: $\left| (3 A^4)(4 A^2)^{-1} \right| = \frac{81}{256}.$

c) ¿ matriz B ? / existe B^{-1} y $B B = B$

Partimos de $B B = B$, como existe B^{-1} multiplicamos la igualdad por B^{-1} por la izquierda,
 $B^{-1} B B = B^{-1} B$

$$I B = I$$

$$B = I$$

Solución: $B = I$ (B es la matriz identidad).

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,0,0)$ y $C = (0,3,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C , (1 punto)
y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O . (2 puntos)
- El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π . (3 puntos)
- El área de la cara cuyos vértices son los puntos A , B y C , (2 puntos)
y el volumen del tetraedro T . (2 puntos)

Solución:

a) ¿plano π que pasa por los puntos $A(1,1,1)$, $B(3,0,0)$ y $C(0,3,0)$?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(1,1,1) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC}(-1,2,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)3 - (y-1)(-3) + (z-1)3 = 0$$

$$3x-3+3y-3+3z-3=0 \rightarrow 3x+3y+3z-9=0 \rightarrow x+y+z-3=0$$

$$\text{Por tanto, } \pi: x + y + z - 3 = 0$$

Recta $h_0 / O \in h_0$ y $h_0 \perp \pi$:

$$h_0: \begin{cases} \text{Punto } O(0,0,0) \\ \text{vector director, como } h_0 \perp \pi \rightarrow \vec{v}_{h_0} = \vec{n}_\pi(1,1,1) \end{cases}$$

Ecuaciones de h_0 :

$$\text{Ecuación vectorial: } (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow$$

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ecuación paramétrica: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ecuación continua: } x = y = z$$

b) ¿ $h_0 \cap \pi$?

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta paramétrica en la ecuación del plano,

$$\lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda = 3; \quad \lambda = 1$$

El punto de corte entre la recta h_0 y el plano π es $(1, 1, 1)$

c) Área de la cara de vértices A, B y C

Como es un tetraedro su cara es un triángulo de vértices A, B y C y calculamos su área mediante la fórmula: (los vectores a usar los calculamos en el apartado a)

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{k} + \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = (3, 3, 3)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ u.a.}$$

Solución: el área de la cara pedida es $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ u.a.}$

El volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C podemos obtenerlo de dos formas:

a) Mediante la fórmula: $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{OA} \ \overrightarrow{OB} \ \overrightarrow{OC}] \right|$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{OB} = (3, 0, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (0, 3, 0) \end{array} \right\} V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{OA} \ \overrightarrow{OB} \ \overrightarrow{OC}] \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |9| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} u^3$$

b) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano π , y la altura del tetraedro, que estaría sobre la recta que pasa por el punto O y es perpendicular al plano π (la recta h_0 obtenida en el apartado a)); por tanto la altura del tetraedro es la distancia entre los puntos O (0,0,0) y el obtenido en el apartado b) P (1,1,1).

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} A_{\text{triángulo A,B,C}} d(P, O)^*$$

$$A_{\text{triángulo A,B,C}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{del apartado anterior})$$

$$d(P, O) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es $\frac{3}{2} u^3$.

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f , (2 puntos)
y los extremos relativos de la función f . (1 punto)
- Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 puntos)
- El área de la región plana limitada por la curva $y = \frac{x^2 + 1}{x}$, $1 \leq x \leq e$,
el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 puntos)

Solución:

a) Monotonía de $f(x)$.

Estudiemos el signo de $f'(x)$, sabemos que $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{0\}$.

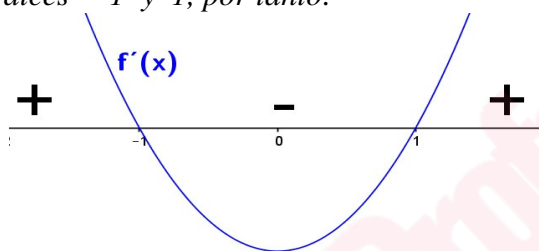
$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$f'(x)$ es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -1 y 1 , por tanto:



Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$.

Del estudio anterior obtenemos que $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

$$\text{Para } x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\text{Para } x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{1^2 + 1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $(-1, -2)$ y un mínimo relativo en $(1, 2)$.

b) ¿Asíntotas de $y = \frac{x^2 + 1}{x}$?

Asíntota vertical,

Posible A.V. $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 0 \text{ es A.V.}$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal.}$$

Asíntota oblicua,

Como la función es un cociente de polinomios y $\text{grad}(\text{numerador}) - \text{grad}(\text{denominador}) = 2 - 1 = 1$ la función tiene asíntota oblicua y la obtenemos efectuando la división polinómica:

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \overline{) x} \\ -x^2 \\ \hline 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad y = x \text{ es la asíntota oblicua.}$$

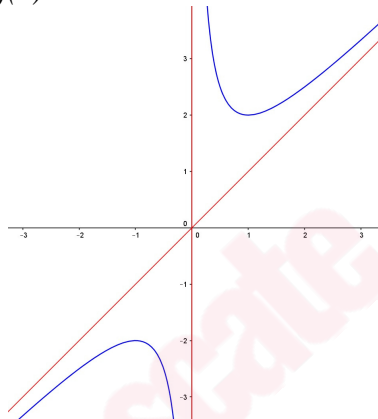
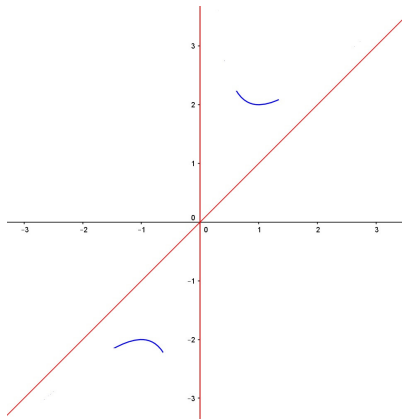
Finalmente, la curva tiene $x = 0$ como asíntota vertical e $y = x$ como asíntota oblicua.

c) ¿Área de la región plana?

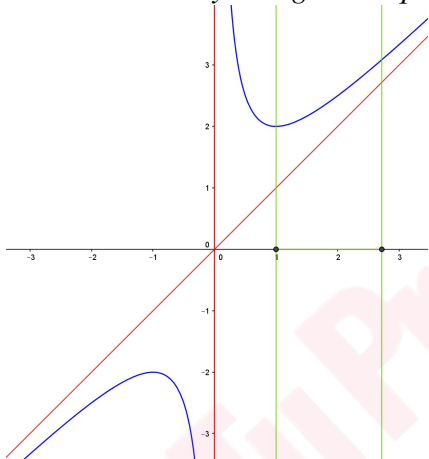
De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función $f(x)$,

Sabemos

Por tanto, $f(x)$ será:



Trazando las rectas y el segmento que delimitan la región:



Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:

El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral

definida: $\int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{x^2 + 1}{x} dx = \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} dx &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} + \ln|e| \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \ln|1| \right) = \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \approx 4.1945 \end{aligned}$$

Solución: el valor del área pedida es $\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right) u^2 \approx 4.1945 u^2$.