

En los apartados geométricos se expresan las rectas en forma paramétrica y los planos en forma general.

Opción A - Ejercicio 1

En $x = 0$, la rama izquierda vale 0. La continuidad de la rama derecha exige $c = 0$. Sus derivadas laterales en 0 son a y 0, respectivamente; para que la función sea derivable debe ser $a = 0$. Con estos valores, en la rama $x > 0$ queda $f(x) = bx^2/(x+1)$. La pendiente en $x = 1$ vale

$$f'(x) = b \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, \quad f'(1) = \frac{3b}{4} = 3,$$

por lo que $b = 4$. Así,

$$\boxed{a = 0, \quad b = 4, \quad c = 0}.$$

Opción A - Ejercicio 2

En $[2, 3]$, $(x-1)(x-4) < 0$, así que $f(x) = 3/((x-1)(x-4))$ está bajo el eje x . El área geométrica se calcula integrando $-f$:

$$\mathcal{A} = - \int_2^3 \frac{3}{(x-1)(x-4)} dx.$$

La descomposición en fracciones simples es $\frac{3}{(x-1)(x-4)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}$. Luego

$$\mathcal{A} = -[-\ln|x-1| + \ln|x-4|]_2^3 = \boxed{2\ln 2}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Primero calculamos A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial equivale a $AXA^T = B + 2I$. Para despejar X , multiplicamos a la izquierda por A^{-1} y a la derecha por $(A^T)^{-1}$:

$$X = A^{-1}(B + 2I)(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $\boxed{X = A^{-1}}$. La multiplicación directa da $AXA^T - B = 2I$.

Opción A - Ejercicio 4

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -2, 2)$, los puntos que dividen el segmento en tres partes iguales se obtienen sumando a A un tercio y dos tercios de ese vector:

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \quad P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Un plano perpendicular a AB tiene como vector normal a $\overrightarrow{AB}$. Usando $A(1, 2, 1)$:

$$-2(x - 1) - 2(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \implies \boxed{x + y - z - 2 = 0}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, derivamos mediante la regla del producto:

$$f'(x) = \sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \frac{4(2-x)}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}.$$

En $x = -5$, $f(-5) = -8$ y $f'(-5) = 7/3$. Por ello,

$$\boxed{y+8 = \frac{7}{3}(x+5)}, \quad \boxed{y+8 = -\frac{3}{7}(x+5)}.$$

En $x = 2$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = 0$. La tangente es horizontal y la normal vertical:

$$\boxed{y = 3}, \quad \boxed{x = 2}.$$

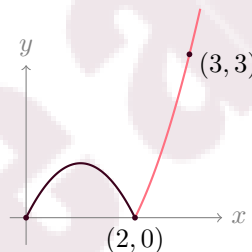
Opción B - Ejercicio 2

Escribimos la función por ramas para localizar el cambio de expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \leq 2, \\ x^2 - 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

Sus ceros son $x = 0$ y $x = 2$. En $[0, 2]$ y $[2, 3]$ la función es no negativa, así que el área es la suma de las integrales:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 (2x - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$



Opción B - Ejercicio 3

Para que ambas matrices tengan rango 2, sus determinantes deben anularse. Los determinantes son

$$\det A = a - c, \quad \det B = 3a - 2b - 2c.$$

Por tanto, $a = c$ y $b = c/2$. Tomando $c = 2$ se obtiene el vector no nulo $v = (2, 1, 2)$. Comprobamos que ambas matrices tienen rango exactamente 2: en A las filas primera y tercera coinciden, pero la segunda no es proporcional a la primera; en B , el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale $-2 \neq 0$. Así,

$$v = (2, 1, 2)$$

sirve para las dos matrices.

Opción B - Ejercicio 4

La recta tiene punto $P = (1, 0, 1)$ y vector director $(m, 4, 2)$. Para que sea perpendicular al plano, ese vector debe ser paralelo al normal $(2, -1, n)$:

$$(m, 4, 2) = k(2, -1, n).$$

De $4 = -k$ resulta $k = -4$, y entonces $m = -8$, $n = -1/2$. Para que la recta esté contenida en el plano, primero exigimos que P pertenezca a él: $2 + n = 0$, luego $n = -2$. Además, el director debe ser perpendicular al normal:

$$(m, 4, 2) \cdot (2, -1, -2) = 2m - 8 = 0,$$

de donde $m = 4$. En conclusión,

$$(m, n) = (-8, -1/2) \text{ para perpendicularidad; } (m, n) = (4, -2) \text{ para inclusión.}$$