

Julio de 2025 · Convocatoria extraordinaria especial

Se desarrollan las dos alternativas de las preguntas 2, 3 y 4 para que puedas estudiar ambas. En el examen, contesta solo la alternativa que elijas.

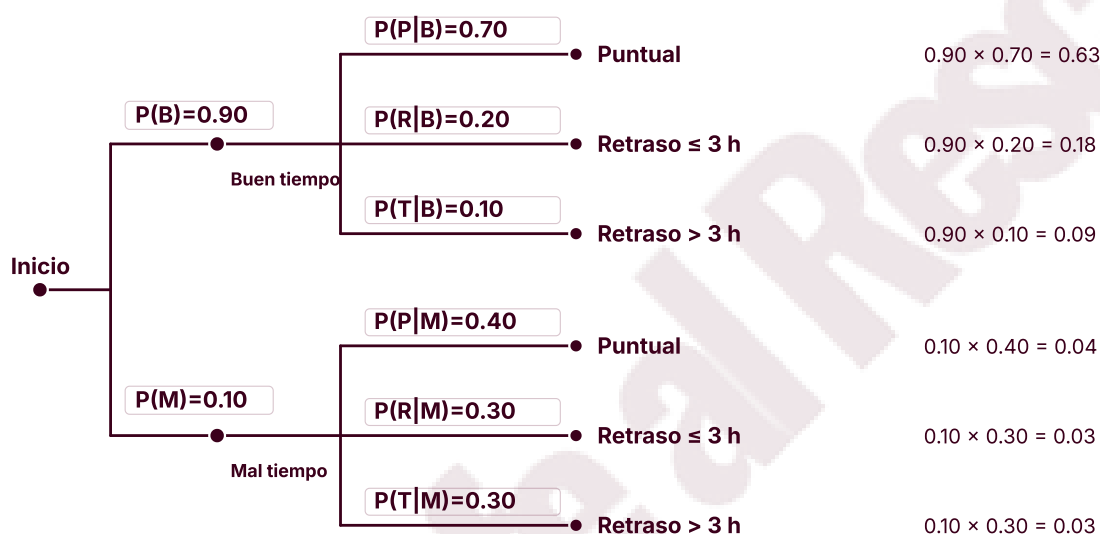
Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

Qué se pregunta. Se estudia la relación entre el tiempo y los retrasos de los vuelos. Llamamos B a «buen tiempo», M a «mal tiempo», P a «vuelo puntual», R a «retraso de hasta 3 horas» y T a «retraso de más de 3 horas».

Datos. $P(B) = 0.90$, por tanto $P(M) = 1 - 0.90 = 0.10$. Las probabilidades condicionadas que faltan se obtienen restando de 1:

$$P(R | B) = 1 - 0.70 - 0.10 = 0.20, \quad P(R | M) = 1 - 0.40 - 0.30 = 0.30.$$

El árbol muestra primero el tiempo y después el resultado del vuelo. En cada camino multiplicamos la probabilidad de sus ramas; los productos finales son las probabilidades conjuntas.



1.1 · Probabilidad de un retraso superior a 3 horas

Regla. Sumamos las probabilidades de los caminos que terminan en T : buen tiempo y retraso largo, o mal tiempo y retraso largo.

$$P(T) = P(B)P(T | B) + P(M)P(T | M) = 0.90 \cdot 0.10 + 0.10 \cdot 0.30 = \boxed{0.12}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es **0.12**, es decir, un **12 %**.

1.2 · Probabilidad de mal tiempo sabiendo que el vuelo fue puntual

Regla de Bayes. Dividimos la probabilidad de que coincidan mal tiempo y puntualidad entre la probabilidad total de puntualidad:

$$P(M | P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{P(M)P(P | M)}{P(B)P(P | B) + P(M)P(P | M)} = \frac{0.10 \cdot 0.40}{0.90 \cdot 0.70 + 0.10 \cdot 0.40} = \frac{0.04}{0.67} = \boxed{\frac{4}{67}} \approx 0.0597.$$

Conclusión. Sabiendo que el vuelo fue puntual, la probabilidad de que hiciera mal tiempo es aproximadamente **0.0597**, un **5.97 %**.

1.3 · Enlazar los doce vuelos con destino final

Con buen tiempo, se enlaza si el primer vuelo es puntual o llega con un retraso de hasta 3 horas. Esos resultados no se solapan:

$$P(\text{enlazar en un viaje} | B) = P(P | B) + P(R | B) = 0.70 + 0.20 = 0.90.$$

Suponiendo independientes los doce viajes mensuales, la probabilidad de enlazar en todos es el producto de doce probabilidades iguales:

$$P(\text{enlazar los 12}) = (0.90)^{12} = 0.282429536481 \approx \boxed{0.2824}.$$

Conclusión. La probabilidad es aproximadamente un **28.24 %**.

Pregunta 2 · Álgebra

El examen pide elegir entre 2.1 y 2.2; se desarrollan las dos opciones.

2.1 · Matriz D , productos y ecuación matricial

La matriz y los vectores del enunciado son

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E = (1 \quad 4 \quad 3), F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 · Invertibilidad de D

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Desarrollamos por la primera fila:

$$\det D = 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} m & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - m^2.$$

Para todo $m \in \mathbb{R}$, $m^2 \geq 0$, luego $-1 - m^2 < 0$ y nunca vale cero.

Conclusión. D tiene inversa para todos los valores reales de m .

2.1.2 · Productos EF y $(FE)^t$

Producto EF . Las dimensiones son $(1 \times 3)(3 \times 1)$, así que el producto existe y es una matriz 1×1 :

$$EF = (1 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)) = \boxed{(6)}.$$

Producto FE . Ahora las dimensiones son $(3 \times 1)(1 \times 3)$, por lo que se obtiene una matriz 3×3 :

$$FE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad 4 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Trasponemos intercambiando filas y columnas:

$$(FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 · Ecuación matricial para $m = 0$

El enunciado pide resolver $\frac{1}{2}X + D = D^t$. Sustituimos $m = 0$:

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D_0^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restamos D_0 en ambos lados y multiplicamos por 2:

$$\frac{1}{2}X = D_0^t - D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = 2(D_0^t - D_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 · Rango de A e inversa de $\frac{1}{6}A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinante y valores singulares. Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & m \\ m-1 & 5 \end{vmatrix} + (m+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m-1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 - m(m-1) - (m+1)(m-1) \\ &= 6 + m - 2m^2 = -(2m+3)(m-2).\end{aligned}$$

El determinante se anula para $m = -\frac{3}{2}$ o $m = 2$. En esos dos casos el rango es menor que 3. Para decidir si baja a 1, usamos el menor superior izquierdo de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) \geq 2$ para todo m . Por tanto:

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & m \neq -\frac{3}{2}, m \neq 2, \\ 2, & m = -\frac{3}{2} \text{ o } m = 2. \end{cases}$$

Inversa cuando $m = 0$. Entonces

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \det A_0 = 6 \neq 0.$$

Usamos $A_0^{-1} = \text{adj}(A_0) / \det A_0$. La matriz de cofactores y su traspuesta son:

$$C(A_0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{adj}(A_0) = C(A_0)^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $(\frac{1}{6}A_0)^{-1} = 6A_0^{-1}$, resulta

$$\left(\frac{1}{6}A_0\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 · Posición relativa de dos planos; ángulo y distancia

Pasamos ambos planos a forma general y anotamos sus vectores normales:

$$\pi_1 : 2x - a^2y - az - a + 1 = 0, \vec{n}_1 = (2, -a^2, -a); \pi_2 : (a-1)x - ay - z - a = 0, \vec{n}_2 = (a-1, -a, -1).$$

Paralelismo. Dos planos tienen normales proporcionales exactamente cuando su producto vectorial es nulo:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (a+1)(a-2)(0, -1, a).$$

El vector $(0, -1, a)$ nunca es nulo. Por ello, las normales son paralelas solo si $a = -1$ o $a = 2$. Para los demás valores los planos no son paralelos y se cortan en una recta.

Comprobación de coincidencia en los dos casos paralelos. Si $a = -1$:

$$\pi_1 : 2x - y + z + 2 = 0, -\pi_2 : 2x - y + z - 1 = 0.$$

Tienen la misma normal, pero términos independientes distintos; son paralelos no coincidentes. Si $a = 2$:

$$\pi_1 : 2x - 4y - 2z - 1 = 0, 2\pi_2 : 2x - 4y - 2z - 4 = 0.$$

También son paralelos distintos. No hay ningún valor de a para el que coincidan.

$a = -1$ o $a = 2$	: paralelos no coincidentes,
$a \neq -1, 2$	: se cortan en una recta,
ningún a	: coincidentes.

Ángulo si $a = 0$. Los normales son $\vec{n}_1 = (2, 0, 0)$ y $\vec{n}_2 = (-1, 0, -1)$. El ángulo agudo entre planos se calcula con el ángulo entre sus normales:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

Distancia de $P = (1, 0, -1)$ a π_1 si $a = 0$. El plano es $2x + 1 = 0$. Aplicamos la fórmula punto-plano:

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

3.2 · Planos relacionados con una recta

La recta del enunciado ya está en forma paramétrica:

$$r: x = 1 + \lambda, y = -1 - 2\lambda, z = 1, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un punto de ella es $Q = (1, -1, 1)$ y un vector director es $\vec{v} = (1, -2, 0)$. El plano dado es $\pi: 2x + y - 3 = 0$, con normal $\vec{n}_\pi = (2, 1, 0)$.

Plano perpendicular a π que contiene a r . Su normal debe ser perpendicular al vector director de la recta y también a la normal de π . Calculamos un vector con ambas propiedades mediante el producto vectorial:

$$\vec{n}_\sigma = \vec{n}_\pi \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -5) \sim (0, 0, 1).$$

El plano de normal $(0, 0, 1)$ que pasa por $Q = (1, -1, 1)$ es

$$z - 1 = 0 \iff \boxed{z = 1}.$$

Al sustituir la recta, su coordenada z vale 1 para todo λ , así que contiene a r . Además, $(0, 0, 1) \cdot (2, 1, 0) = 0$; por ello es perpendicular a π .

Plano paralelo a π que contiene a r . Todo plano paralelo a π tiene la forma general $2x + y + D = 0$. Sustituimos las coordenadas paramétricas de r :

$$2(1 + \lambda) + (-1 - 2\lambda) + D = 0 \implies 1 + D = 0 \implies D = -1.$$

Conclusión. El plano pedido existe y es $\boxed{2x + y - 1 = 0}$. La sustitución muestra que contiene todos los puntos de r , y su normal coincide con la de π .

Pregunta 4 · Análisis

El enunciado permite elegir entre 4.1 y 4.2; se explican ambas opciones.

4.1 · Monotonía, extremos y área entre curvas

4.1.1 · Crecimiento, decrecimiento y extremos de f

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16.$$

Domino. Es un polinomio, así que está definido para cualquier número real: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Derivada y puntos críticos. Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = 4x^3 - 14x = 2x(2x^2 - 7) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Sea $r = \sqrt{7/2}$. Comprobamos el signo de f' con un valor de prueba en cada intervalo:

Intervalo	Prueba	$f'(\text{prueba})$	Comportamiento
$(-\infty, -r)$	-2	$-4 < 0$	Decrece
$(-r, 0)$	-1	$10 > 0$	Crece
$(0, r)$	1	$-10 < 0$	Decrece
$(r, +\infty)$	2	$4 > 0$	Crece

En $x = -r$ el signo pasa de negativo a positivo y en $x = r$ vuelve a pasar de negativo a positivo; ambos son mínimos. En $x = 0$ cambia de positivo a negativo, por lo que hay un máximo.

$$f(0) = 16, f(\pm r) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 16 = \frac{15}{4}.$$

Conclusión. Decrece en $(-\infty, -r) \cup (0, r)$ y crece en $(-r, 0) \cup (r, +\infty)$. Tiene máximo relativo $(0, 16)$ y mínimos relativos $(-\sqrt{7/2}, 15/4)$ y $(\sqrt{7/2}, 15/4)$. Como $f(x) \rightarrow +\infty$ en ambos extremos, esos mínimos también son absolutos.

Asíntotas. No hay asíntotas verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. Además, $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que no hay horizontales. Para una posible oblicua, la pendiente debería ser finita; pero

$$\frac{f(x)}{x} = x^3 - 7x + \frac{16}{x} \longrightarrow \begin{cases} -\infty, & x \rightarrow -\infty, \\ +\infty, & x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

por lo que tampoco hay asíntota oblicua.

4.1.2 · Área finita encerrada entre f y g

Igualemos las funciones para localizar los puntos de intersección:

$$f(x) = g(x) \iff x^4 - 7x^2 + 16 = x^2 \iff x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 = 0.$$

Así, $x = -2$ y $x = 2$. Como $(x^2 - 4)^2 \geq 0$, la gráfica de f está por encima de la de g entre esos cortes. El área es la integral de la diferencia:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) \, dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32 \right) \\ &= \boxed{\frac{512}{15} \, \text{u}^2 \approx 34.1333 \, \text{u}^2}. \end{aligned}$$

Conclusión. La superficie finita encerrada tiene área $512/15$ unidades cuadradas.

4.2 · Coste mínimo del oleoducto

Definición de la variable y dominio. Sea x la distancia por tierra entre el punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería. La refinería está a 8 km de P , así que desde P hasta el punto de contacto hay $8 - x$ km. El punto de contacto queda entre P y la refinería; por ello $0 \leq x \leq 8$.

La plataforma está a 6 km de la costa, en perpendicular a ella desde P . Por Pitágoras, la longitud submarina es $\sqrt{(8-x)^2 + 6^2}$ km. El coste bajo el agua es 1 millón de euros por km y el coste en tierra es 0.6 millones de euros por km. Medimos C en millones de euros:

$$C(x) = 1 \cdot \sqrt{(8-x)^2 + 36} + 0.6x, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

Punto crítico. Derivamos y resolvemos $C'(x) = 0$:

$$C'(x) = -\frac{8-x}{\sqrt{(8-x)^2 + 36}} + \frac{3}{5} = 0 \iff \frac{8-x}{\sqrt{(8-x)^2 + 36}} = \frac{3}{5}.$$

En el dominio $8 - x \geq 0$, así que al elevar al cuadrado no perdemos la solución válida:

$$25(8-x)^2 = 9((8-x)^2 + 36) \implies 16(8-x)^2 = 324 \implies 8-x = \frac{9}{2} \implies x = \frac{7}{2} \text{ km}.$$

Para confirmar el cambio de signo, probamos a ambos lados del punto crítico:

Valor de prueba	$C'(x)$	Signo
$x = 3$	$\frac{3}{5} - \frac{5}{\sqrt{61}} \approx -0.0402$	-
$x = 4$	$\frac{3}{5} - \frac{4}{\sqrt{52}} \approx 0.0453$	+

La derivada cambia de negativa a positiva. Además,

$$C''(x) = \frac{36}{((8-x)^2 + 36)^{3/2}} > 0$$

en todo el dominio, por lo que el punto crítico es el único mínimo y, al ser $[0, 8]$ cerrado, es el mínimo absoluto. Como comprobación de los extremos, $C(0) = 10$ y $C(8) = 10.8$ millones.

Coste mínimo. Para $x = 7/2$, el tramo submarino mide

$$\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 36} = \frac{15}{2} \text{ km}.$$

Entonces

$$C\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{48}{5} = 9.6 \text{ millones de euros}.$$

Conclusión. Para minimizar el coste, el oleoducto debe tocar la costa a $7/2 = 3.5$ km de la refinería; el coste mínimo es 9.6 millones de euros.