

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio 1 · Aproximación binomial e intervalo de confianza

a) Sea X el número de teléfonos defectuosos comunicados en una muestra de 288. Si el comunicado es cierto, cada teléfono tiene probabilidad $p = 0,02$ de ser defectuoso y

$$X \sim \text{Bin}(288, 0,02), \quad \mu = np = 5,76, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5,6448} \approx 2,3759.$$

Como $np = 5,76$ y $n(1-p) = 282,24$ son suficientemente grandes para la aproximación normal que pide el enunciado, aproximamos X por $Y \sim N(5,76, 2,3759)$. Para conservar la probabilidad de que X sea al menos 11, aplicamos la corrección de continuidad en el límite 10,5:

$$P(X \geq 11) \approx P(Y \geq 10,5) = P\left(Z \geq \frac{10,5 - 5,76}{2,3759}\right) = P(Z \geq 1,9951) \approx 0,0230.$$

b) La proporción observada es $\hat{p} = 20/288 = 5/72 \approx 0,06944$. Para un intervalo bilateral del 99% usamos $z_{0,995} \approx 2,576$ y la fórmula

$$\hat{p} \pm z_{0,995} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Al sustituir los datos,

$$0,06944 \pm 2,576 \sqrt{\frac{0,06944(1-0,06944)}{288}} = 0,06944 \pm 0,03858,$$

por lo que $IC_{99\%}(p) \approx (0,03086, 0,10803)$. El 2% anunciado por la empresa queda fuera del intervalo; con este nivel de confianza, los datos hacen cuestionable el comunicado.

$$P(X \geq 11) \approx 0,0230; \quad IC_{99\%}(p) \approx (0,03086, 0,10803).$$

Ejercicio 2 · Discusión de un sistema y programación lineal

Pregunta 2.1. La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $\det A = 2 - a$. Si $a \neq 2$, $\det A \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, igual al número de incógnitas: el sistema es compatible determinado (SCD).

Para $a = 2$, la tercera fila de A es la suma de las dos primeras, y también lo es su término independiente, pues $5 = 2 + 3$. Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado (SCI). Para resolverlo, tomamos $z = \lambda$. Restando la primera ecuación de la segunda se obtiene $x - 2y = 1$; junto con $x + y + z = 2$ resulta

$$y = \frac{1-\lambda}{3}, \quad x = \frac{5-2\lambda}{3}.$$

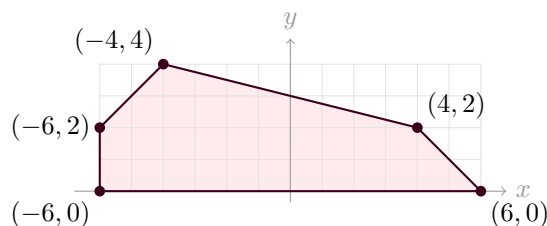
$$a \neq 2 : \text{SCD}; \quad a = 2 : \text{SCI}, \quad (x, y, z) = \left(\frac{5-2\lambda}{3}, \frac{1-\lambda}{3}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pregunta 2.2. Sean x e y las coordenadas del punto factible. La región viene dada por

$$x \geq -6, \quad y \geq 0, \quad y \leq x + 8, \quad y \leq 3 - \frac{x}{4}, \quad y \leq 6 - x.$$

Las intersecciones de las fronteras que cumplen todas las restricciones son $(-6, 0)$, $(-6, 2)$, $(-4, 4)$, $(4, 2)$ y $(6, 0)$. Por ejemplo, $(-4, 4)$ se obtiene de $y = x + 8$ y $x + 4y = 12$; $(4, 2)$ se obtiene de $x + 4y = 12$ y $x + y = 6$. La

región factible queda representada por el polígono siguiente.



La función que se quiere maximizar es $G(x, y) = 2y - 3x$. En una región poligonal, una función lineal alcanza su máximo en algún vértice; evaluamos, por tanto, G en todos ellos:

(x, y)	$(-6, 0)$	$(-6, 2)$	$(-4, 4)$	$(4, 2)$	$(6, 0)$
$G(x, y)$	18	22	20	-8	-18

$$G_{\max} = 22 \text{ en el punto } (-6, 2).$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Primitiva, área, tangente y asíntotas

Pregunta 3.1. Una primitiva de $f(x) = x^3 + ax$ es

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + C.$$

De $F(0) = 0$ se obtiene $C = 0$; imponiendo $F(1) = 1$ queda $1/4 + a/2 = 1$, luego $a = 3/2$.

Para este valor de a , $f(x) = x(x^2 + 3/2) \geq 0$ en $[0, 2]$, así que el área pedida coincide con la integral y no hay que cambiar el signo:

$$A = \int_0^2 \left(x^3 + \frac{3}{2}x \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} \right]_0^2 = 4 + 3 = 7.$$

La pendiente de la tangente en $x = 1$ es $f'(1) = 3 + a$. La condición $3 + a = 1$ exigiría $a = -2$, que no cumple el dato $a > 0$; por tanto, no existe ningún valor permitido de a .

$$a = \frac{3}{2}; \quad A = 7 \text{ u}^2; \quad \text{no existe } a > 0 \text{ con } f'(1) = 1.$$

Pregunta 3.2. En la rama $x < 0$, el denominador $2x - 1$ no se anula; en la rama $x \geq 0$, hay que excluir $x = 3$. Así,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

En el punto de unión, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ y $f(0) = 0$, por lo que la función es continua en $x = 0$. Las asíntotas verticales pueden aparecer en ceros del denominador pertenecientes al dominio límite. En $x = 3$, el numerador vale $117 \neq 0$ y los límites laterales son infinitos de signo opuesto, luego $x = 3$ es vertical. En el extremo $x \rightarrow -\infty$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x - 1} = \frac{1}{2},$$

por lo que $y = 1/2$ es horizontal por la izquierda. Para $x \rightarrow +\infty$ dividimos polinomios:

$$\frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = 4x + 1 + \frac{36x + 9}{x^2 - 9},$$

y el último término tiende a cero; por tanto, la asíntota oblicua es $y = 4x + 1$.

$$x = 3 \text{ vertical}; \quad y = \frac{1}{2} \text{ horizontal cuando } x \rightarrow -\infty; \quad y = 4x + 1 \text{ oblicua cuando } x \rightarrow +\infty.$$

Ejercicio 4 · Probabilidad y Bayes

Pregunta 4.1. Sabemos que $P(A) = 0,4$ y $P(\bar{B}) = 0,7$, luego $P(B) = 0,3$. Como A y B son independientes,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12.$$

Por De Morgan, «no ocurre A o no ocurre B » es el complementario de $A \cap B$, de modo que su probabilidad es $1 - 0,12 = 0,88$. Además, A y $\overline{B}$ también son independientes, así que

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28.$$

Para el último apartado aplicamos la definición de probabilidad condicionada y usamos primero la probabilidad conjunta que proporciona el enunciado:

$$P(C \cap A \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B} | C)P(C) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1,$$

$$P(C | A \cap \overline{B}) = \frac{P(C \cap A \cap \overline{B})}{P(A \cap \overline{B})} = \frac{0,1}{0,28} = \frac{5}{14}.$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,88; \quad P(A \cap \overline{B}) = 0,28; \quad P(C | A \cap \overline{B}) = \frac{5}{14}.$$

Pregunta 4.2. Sea D el suceso «el gato tiene insuficiencia renal» y $+$ el suceso «la prueba da positivo». Los datos son $P(D) = 0,05$, $P(+ | D) = 0,9$ y $P(+ | \overline{D}) = 0,1$; por tanto, $P(\overline{D}) = 0,95$, $P(- | D) = 0,1$ y $P(- | \overline{D}) = 0,9$. En cada rama se multiplican las probabilidades sucesivas, y se suman los dos casos incompatibles que pueden producir un resultado negativo:

$$P(-) = P(- | D)P(D) + P(- | \overline{D})P(\overline{D}) = 0,1(0,05) + 0,9(0,95) = 0,86.$$

Si la prueba es positiva, invertimos la condición mediante Bayes:

$$P(D | +) = \frac{P(+ | D)P(D)}{P(+ | D)P(D) + P(+ | \overline{D})P(\overline{D})} = \frac{0,9(0,05)}{0,9(0,05) + 0,1(0,95)} = \frac{9}{28} \approx 0,3214.$$

$$P(-) = 0,86; \quad P(D | +) = \frac{9}{28} \approx 0,3214.$$