

Modelo 4 de 2000

Se estudian límites, derivadas, integrales, rectas, matrices, optimización y sistemas con parámetro.

Opción A - Ejercicio 1

Para $x \neq 0$, $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$. Si $x \rightarrow 0^+$, entonces $e^{1/x} \rightarrow +\infty$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

Si $x \rightarrow 0^-$, $e^{1/x} \rightarrow 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1.$$

Los límites laterales son distintos, por lo que f no es continua en 0 (aunque $f(0) = 0$). Para derivar, aplicamos la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2(1 + e^{1/x})^2}, \quad \boxed{f'(1) = \frac{e}{(1 + e)^2}}.$$

Opción A - Ejercicio 2

La derivada de xe^x es $(1 + x)e^x$, así que

$$\boxed{\int (1 + x)e^x dx = xe^x + C}.$$

La primitiva que pasa por $(0, 3)$ debe cumplir $F(0) = 3$. Como $xe^x = 0$ en $x = 0$, se obtiene

$$\boxed{F(x) = xe^x + 3}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Sean $P = (1, 2, 1)$ y $\vec{u} = (1, 1, -2)$ un punto y un vector director de r ; para s tomamos $Q = (4, -1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 3, 2)$. Si $R = P + \alpha\vec{u}$ y $S = Q + \beta\vec{v}$ son los puntos de apoyo, el vector $R - S$ debe ser perpendicular a ambos directores. Por tanto,

$$(R - S) \cdot \vec{u} = 0, \quad (R - S) \cdot \vec{v} = 0.$$

Al desarrollar, obtenemos

$$3\alpha + \beta = 1, \quad \alpha + 7\beta = 7,$$

de donde $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Por tanto, $R = (1, 2, 1)$ y $S = (3, 2, 2)$. La dirección de la recta perpendicular común es $S - R = (2, 0, 1)$. En forma paramétrica:

$$\boxed{x = 1 + 2t, \quad y = 2, \quad z = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Para $AX = U$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \implies \boxed{(x, y) = (3, -1)}.$$

Como $\det A = 9 - 8 = 1$, la inversa existe y es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por ello $A^{-1}U = (3, -1)^t$, coincidente con la solución anterior.

Los vectores $A(1, m)^t = (3 + 2m, 4 + 3m)^t$ y $(1, m)^t$ son dependientes cuando su determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} 3 + 2m & 1 \\ 4 + 3m & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 4 = 0.$$

Así, $\boxed{m = \pm\sqrt{2}}$.

Opción B - Ejercicio 1

Escribimos el polinomio como $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. La tangencia a $y = x$ en $x = 0$ impone $p(0) = 0$ y $p'(0) = 1$, luego $d = 0$ y $c = 1$. Además, $p(1) = 1$ y $p'(1) = 0$, porque hay un máximo en $x = 1$. Estas condiciones dan

$$a + b + 1 = 1, \quad 3a + 2b + 1 = 0,$$

de donde $a = -1$ y $b = 1$. Como $p''(1) = -4 < 0$, efectivamente presenta un máximo en ese punto:

$$p(x) = -x^3 + x^2 + x.$$

Opción B - Ejercicio 2

En $[0, 2]$, el integrando es positivo; por ello la integral representa el área bajo la curva y sobre el eje x . Factorizamos y descomponemos:

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right).$$

Entonces

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} [\ln(x+1) - \ln(x+3)]_0^2 = \boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}}.$$

Este valor es el área geométrica indicada. **Opción B - Ejercicio 3**

Los planos que contienen dos caras paralelas tienen el mismo vector normal $(2, -2, 1)$. La distancia entre ellos, y por tanto la longitud de la arista del cubo, es

$$d = \frac{|(-1) - (-5)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}.$$

El volumen de un cubo de arista d es $V = d^3$, así que

$$V = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Las matrices del sistema son

$$A_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{\lambda}^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se cumple $\det A_{\lambda} = 0$ para todo λ . El menor de las filas 2 y 3 y columnas 1 y 2 vale -2 , así que $\operatorname{rg}(A_{\lambda}) = 2$. La segunda ecuación da $y = 1 - z$, y la tercera da $x = z - 2$. Al sustituir en la primera:

$$(z - 2) + \lambda(1 - z) + (\lambda - 1)z = \lambda - 2 = 1.$$

Por tanto, el sistema solo puede ser compatible si $\lambda = 3$. Para ese valor, poniendo $z = t$:

$$(x, y, z) = (t - 2, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cuando $\lambda = 3$, la primera fila ampliada es $5/2$ veces la segunda más $1/2$ vez la tercera, por lo que $\operatorname{rg}(A_3) = \operatorname{rg}(A_3^*) = 2 < 3$ y el sistema es SCl. Si $\lambda \neq 3$, la condición es contradictoria; entonces $\operatorname{rg}(A_{\lambda}^*) = 3 > \operatorname{rg}(A_{\lambda})$ y el sistema es SI. Así, $\lambda = 3$ es el único valor para el que hay al menos dos soluciones distintas.