

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para cubrir la propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Sistema de ecuaciones lineales

La matriz de coeficientes y el término independiente proporcionan

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ -4x + 2y + z = 0, \\ 2x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

Restando la tercera ecuación de la primera obtenemos $y = 2$. La tercera da $2x - z = -3$, luego $z = 2x + 3$. Sustituimos en la segunda: $-4x + 4 + 2x + 3 = 0$, de donde $x = 7/2$ y $z = 10$.

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, 2, 10\right).$$

Problema 2 · Beneficio de una inversión

La función es $B(t) = \frac{36t}{t^2 + 324} + 1$ para $t \geq 0$. Derivamos para conocer su evolución:

$$B'(t) = \frac{36(324 - t^2)}{(t^2 + 324)^2}.$$

El denominador es positivo. La derivada es positiva para $0 < t < 18$ y negativa para $t > 18$: durante los primeros 30 meses, el beneficio crece hasta el mes 18 y luego decrece. El beneficio parte de $B(0) = 1\%$, alcanza su máximo y después desciende. A los 30 meses,

$$B(30) = \frac{36 \cdot 30}{30^2 + 324} + 1 = \frac{32}{17}\% \approx 1,88\%.$$

El máximo es

$$B(18) = \frac{36 \cdot 18}{18^2 + 324} + 1 = 2\%.$$

Por último, el cociente de los términos dominantes tiende a cero, así que $B(t) \rightarrow 1\%$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Máximo del 2% en el mes 18; a largo plazo, el beneficio tiende al 1%.

Problema 3 · Respuesta a un tratamiento

De 120 pacientes, 30 habían padecido la enfermedad y 90 no. Entre los primeros reaccionaron positivamente $0,8 \cdot 30 = 24$; entre los segundos, $0,9 \cdot 90 = 81$. Hay 105 respuestas positivas y 15 no positivas. a) La probabilidad de no reaccionar positivamente es $15/120 = 1/8$. b) Aplicando Bayes, entre las 105 respuestas positivas, 81 son de pacientes que no habían padecido antes la enfermedad:

$$P(\text{sin antecedente} \mid +) = \frac{81}{105} = \frac{27}{35}.$$

c) Al elegir dos pacientes de la población sin reemplazo,

$$P(\text{ambos con antecedente}) = \frac{30}{120} \cdot \frac{29}{119} = \frac{29}{476}.$$

$$P(\text{no positivo}) = \frac{1}{8}, \quad P(\text{sin antecedente} \mid +) = \frac{27}{35}, \quad P(\text{dos con antecedente}) = \frac{29}{476}.$$

Opción B

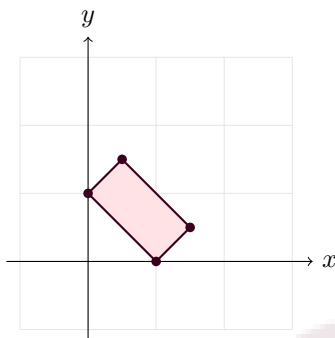
Problema 1 · Región factible y función objetivo

Las inecuaciones delimitan la región

$$x + y \geq 1, \quad x + y \leq 2, \quad y \leq x + 1, \quad y \geq x - 1.$$

Al intersectar las rectas frontera y comprobar las cuatro condiciones, los vértices son $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1/2, 3/2)$ y $(3/2, 1/2)$. Evaluamos $z = 2x + y$:

(x, y)	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
z	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$



$$z_{\min} = 1 \text{ en } (0, 1), \quad z_{\max} = \frac{7}{2} \text{ en } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Problema 2 · Función polinómica

La función $f(x) = (x^2 + x)^2$ es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Los cortes con el eje X satisfacen $x(x + 1) = 0$, por lo que son $(-1, 0)$ y $(0, 0)$; el corte con el eje Y es $(0, 0)$. Como el dominio es todo $\mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales. Además, $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

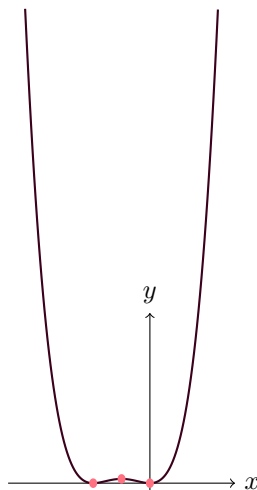
por lo que tampoco hay asíntotas horizontales. Para estudiar crecimiento,

$$f'(x) = 2x(x + 1)(2x + 1).$$

Los puntos críticos son $-1, -1/2, 0$. El signo de la derivada es negativo en $(-\infty, -1)$, positivo en $(-1, -1/2)$, negativo en $(-1/2, 0)$ y positivo en $(0, \infty)$. Así, hay mínimos locales en $x = -1$ y $x = 0$, ambos de valor 0, y un máximo local en $x = -1/2$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Como $f(x) \rightarrow +\infty$ en ambos extremos, no existe máximo absoluto y los dos mínimos de valor 0 son también absolutos.



Mínimos absolutos $(-1, 0), (0, 0)$; máximo local $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$; sin máximo absoluto.

Problema 3 · Transferencia de una bola entre urnas

La urna A tiene 5 bolas rojas y 2 azules; la B, 4 rojas y 1 azul. La bola transferida es roja con probabilidad $5/7$ y azul con probabilidad $2/7$. Tras la transferencia, la urna B contiene 6 bolas. Como las dos extracciones se hacen con reemplazamiento, la composición de la urna no cambia entre una extracción y la siguiente. a) Si se transfiere una roja, la urna B queda con 5 rojas y 1 azul, así que la probabilidad de obtener dos rojas es $(5/6)^2$. Si se transfiere una azul, queda con 4 rojas y 2 azules, y esa probabilidad es $(4/6)^2$. Sumamos los dos caminos:

$$P(RR) = \frac{5}{7} \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{7} \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{157}{252}.$$

b) La probabilidad de obtener colores distintos es $2 \cdot (5/6)(1/6) = 5/18$ si se transfiere una roja y $2 \cdot (4/6)(2/6) = 4/9$ si se transfiere una azul. Por tanto,

$$P(\text{colores distintos}) = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{18} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{41}{126}.$$

c) Sea R_1 el suceso «la primera extracción de la urna B es roja» y A_T el suceso «se transfiere una bola azul». Aplicamos Bayes para invertir la condición:

$$P(A_T | R_1) = \frac{P(A_T)P(R_1 | A_T)}{P(R_1)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{8}{33}.$$

$P(RR) = \frac{157}{252},$	$P(\text{distintas}) = \frac{41}{126},$	$P(A_T R_1) = \frac{8}{33}.$
----------------------------	---	--------------------------------