

Modelo 5 de 2008

Se analizan los intervalos a partir de la derivada y se separan las áreas por los puntos de cambio.

Opción A - Ejercicio 1

En $[0, 2\pi]$,

$$f'(x) = 2e^x \cos x.$$

Como $e^x > 0$, el signo depende de $\cos x$: crece en $[0, \pi/2]$ y $[3\pi/2, 2\pi]$, y decrece en $[\pi/2, 3\pi/2]$. Hay un máximo relativo en $\pi/2$ y un mínimo relativo en $3\pi/2$. Además,

$$f''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x).$$

Esta derivada segunda cambia de signo en $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$, de modo que las inflexiones son

$$\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}e^{\pi/4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}e^{5\pi/4}\right).$$

Opción A - Ejercicio 2

Las intersecciones entre $y = x^2$ y $y = a$ son $x = \pm\sqrt{a}$. La horizontal queda por encima de la parábola entre ambos puntos:

$$\mathcal{A} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \frac{4}{3}a^{3/2}.$$

Al imponer $\mathcal{A} = 4/3$ y usar $a > 0$:

$$a^{3/2} = 1 \implies \boxed{a = 1}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Si $(A - kI)^2 = 0$, todos sus elementos deben anularse. La entrada de la primera fila y segunda columna vale $2k - 2$, por lo que necesariamente $k = 1$. Para este valor,

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $k = 1$. **Opción A - Ejercicio 4**

Para que los tres planos se corten en una recta, la tercera ecuación debe ser suma de las dos primeras. Al sumarlas:

$$3x + 3y + 2bz = 1.$$

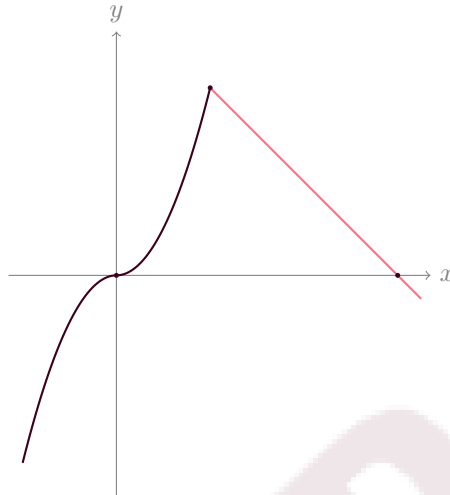
Comparando con $3x + 3y - 2z = 1$ se obtiene $b = -1$. Con este valor, tomando $y = t$ en las dos primeras ecuaciones resulta $x = t - 1$ y $z = 3t - 2$. La recta, en forma paramétrica, es

$$x = t - 1, \quad y = t, \quad z = 3t - 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para $x < 0$, $x|x| = -x^2$; para $0 \leq x \leq 2$, es x^2 . La función es continua y derivable en $x = 0$, pues las derivadas laterales allí valen 0. En $x = 2$ también es continua, pero las derivadas laterales son 4 y -1 , así que no es derivable en ese punto. La gráfica corta al eje x en 0 y 6 y es no negativa entre esos valores. Por ello,

$$\mathcal{A} = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 (6 - x) dx = \frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{32}{3}}.$$



Opción B - Ejercicio 2

Integramos por partes con $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx$:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Evaluando en 1 y e :

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \boxed{\frac{2e^3 + 1}{9}}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene $\det A = -1$, así que es invertible. En cambio, $\det B = 0$, por lo que B no tiene inversa. La ecuación $AX + B = A + I$ da $AX = A + I - B$. Multiplicamos por A^{-1} a la izquierda:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}(A + I - B) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

El plano por B, C, D tiene normal

$$(C - B) \times (D - B) = (1, 4, -3).$$

Como pasa por $B = (-2, 3, 1)$, su ecuación es $x + 4y - 3z - 7 = 0$. Para reflejar $A = (2, 1, -1)$ respecto del plano usamos

$$A' = A - 2 \frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c).$$

El numerador vale $2 + 4 + 3 - 7 = 2$ y el denominador $1 + 16 + 9 = 26$. Así,

$$A' = \left(\frac{24}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{7}{13} \right).$$