

OPCIÓN A

Problema 1. Plantea y escribe el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y cuyo término independiente es } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Resuelve el sistema.}$$

Solución:

El sistema será:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto matricial,
$$\begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ -4x+2y+z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente, el sistema es:
$$\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ -4x+2y+z=0 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ F_2 + 2x F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Esta preparado para resolver,

de $F_3 \rightarrow -y = -2 \rightarrow y = 2$

de $F_2 \rightarrow 8y - z = 6$, sustituyendo el valor obtenido de y
 $8 \cdot 2 - z = 6; \quad 16 - z = 6; \quad 16 - 6 = z; \quad z = 10$

de $F_1 \rightarrow 2x + 3y - z = 3$, sustituyendo los valores obtenidos de z e y

$$2x + 3 \cdot 2 - 10 = 3; \quad 2x + 6 - 10 = 3; \quad 2x - 4 = 3; \quad 2x = 3 + 4; \quad 2x = 7; \quad x = \frac{7}{2}$$

La solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases}$$

* * *

Resolvamos el sistema por el método de Cramer.

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 6 + 4 - 12 - 4 = 18 - 20 = -2 \neq 0$$

Aplicando la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6 + 3 + 2 - 6}{-2} = \frac{5 - 12}{-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4 + 6 - 2 - 12}{-2} = \frac{10 - 14}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4 - 24 - 12 + 12}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$$

La solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases}$$

OPCIÓN A

Problema 2. Se estima que el beneficio anual $B(t)$, en %, que produce cierta inversión viene determinado por el tiempo t en meses que se mantiene dicha inversión a través de la siguiente expresión:

$$B(t) = \frac{36t}{t^2 + 324} + 1, \quad t \geq 0.$$

- Describe la evolución del beneficio en función del tiempo durante los primeros 30 meses.
- Calcula, razonadamente, cuánto tiempo debe mantenerse dicha inversión para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?
- ¿Cuál sería el beneficio de dicha inversión si ésta se mantuviera en el tiempo de forma indefinida?

Solución:

Estudiamos la función $B(t) = \frac{36t}{t^2 + 324} + 1, \quad t \geq 0.$

$$B(0) = \frac{36 \cdot 0}{0^2 + 324} + 1 = \frac{0}{324} + 1 = 0 + 1 = 1, \text{ la función } B(t) \text{ pasa por el punto } (0, 1)$$

Estudiamos su monotonía

$$B'(t) = \frac{36 \cdot (t^2 + 324) - 36 \cdot t \cdot 2t}{(t^2 + 324)^2} = \frac{36t^2 + 11664 - 72t^2}{(t^2 + 324)^2} = \frac{-36t^2 + 11664}{(t^2 + 324)^2}$$

$$B'(t) = 0 \rightarrow \frac{-36t^2 + 11664}{(t^2 + 324)^2} = 0 \rightarrow -36t^2 + 11664 = 0$$

$$36t^2 = 11664$$

$$t^2 = \frac{11664}{36} = 324$$

$$t = \pm\sqrt{324} = \pm 18$$

Como la función $B(t)$ está definida para $t \geq 0$, $t = 18$.

Estudiamos el signo de $B'(t)$ a la izquierda y derecha de 18,

$$\begin{array}{c} | \qquad \qquad \qquad | \\ 0 \qquad \qquad \qquad 18 \\ B'(1) = \frac{-36 \cdot 1^2 + 11664}{(1^2 + 324)^2} = \frac{-36 + 11664}{325^2} = \frac{11628}{325^2} = + \end{array}$$

$$B'(20) = \frac{-36 \cdot 20^2 + 11664}{(20^2 + 324)^2} = \frac{-2376}{(20^2 + 324)^2} = -$$

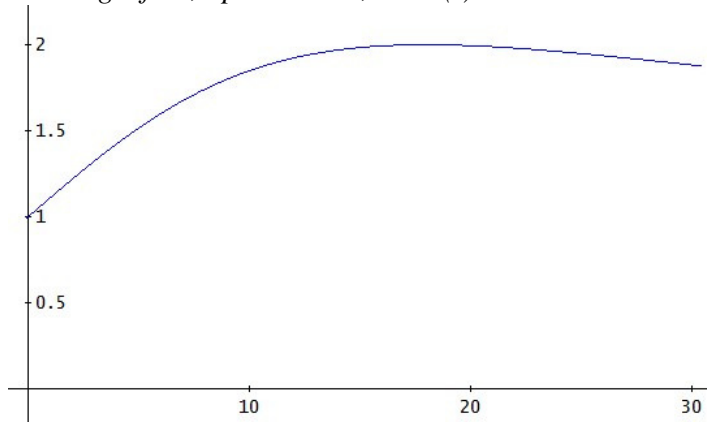
Es decir: $\begin{array}{c} | \qquad \qquad \qquad | \\ 0 \qquad \qquad \qquad 18 \end{array}$ $\begin{array}{c} + \quad \quad \quad - \end{array}$

Por lo tanto, $B(t)$ es creciente en $(0, 18)$ y decreciente en $(18, +\infty)$ y para $t = 18$ alcanza su máximo.

$$B(18) = \frac{36 \cdot 18}{18^2 + 324} + 1 = 2, \text{ el máximo está en el punto } (18, 2)$$

Para responder al apartado a) calculemos el valor de $B(t)$ para $t = 30$, $B(30) = \frac{36 \cdot 30}{30^2 + 324} + 1 = 1,8824$

La representación gráfica, aproximada, de $B(t)$ será:



Respondamos a los apartados.

a) Durante los 30 primeros meses la evolución del beneficio es: empieza proporcionando un beneficio del 1% y va creciendo hasta los 18 meses en que alcanza su valor máximo, un 2%. A partir de los 18 meses, a medida que aumenta el tiempo que se mantiene la inversión el beneficio desciende y manteniéndola 30 meses alcanza el valor de 1'8824%.

b) Según hemos calculado anteriormente el beneficio máximo se alcanza manteniendo la inversión durante 18 meses. Este beneficio máximo es del 2%.

c) Para obtener el beneficio de esta inversión si se mantuviera de forma indefinida debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{36t}{t^2 + 324} + 1 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{36t + t^2 + 324}{t^2 + 324} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Si la inversión se mantuviera en el tiempo de forma indefinida, el beneficio sería del 1%.

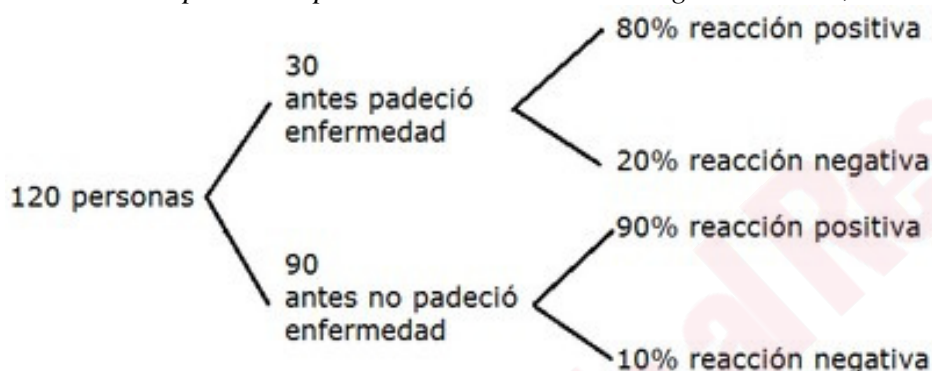
OPCIÓN A

Problema 3. Se ha hecho un estudio de un nuevo tratamiento en un colectivo de 120 personas aquejadas de cierta enfermedad, 30 de las cuales ya habían padecido la enfermedad con anterioridad. Entre las que habían padecido la enfermedad con anterioridad, el 80% ha reaccionado positivamente al nuevo tratamiento. Entre las que no la habían padecido, ha sido el 90% el que reaccionó positivamente.

- Si elegimos un paciente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no reaccione positivamente al nuevo tratamiento?
- Si un paciente ha reaccionado positivamente el tratamiento, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?
- Si elegimos dos pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos pacientes hayan padecido la enfermedad con anterioridad?

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en el siguiente árbol,



Utilizamos los sucesos:

RP = reaccionar positivamente al tratamiento

E = padeció la enfermedad con anterioridad

Resolvamos los apartados

- a) Probabilidad de que no reaccione positivamente al nuevo tratamiento

$$p(\overline{RP}) = \frac{30}{120} \frac{20}{100} + \frac{90}{120} \frac{10}{100} = \frac{6}{120} + \frac{9}{120} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

- b) Si un paciente ha reaccionado positivamente el tratamiento, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?

$$p\left(\frac{\overline{E}}{RP}\right) = \frac{p(\overline{E} \cap RP)}{p(RP)} = \frac{\frac{90}{120} \frac{90}{100}}{\frac{30}{120} \frac{80}{100} + \frac{90}{120} \frac{90}{100}} = \frac{\frac{81}{120}}{\frac{24}{120} + \frac{81}{120}} = \frac{\frac{81}{120}}{\frac{105}{120}} = \frac{81}{105} = \frac{27}{35}$$

- c) Si elegimos dos pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos pacientes hayan padecido la enfermedad con anterioridad?

Como hemos estudiado 120 pacientes y de ellos 30 habían padecido la enfermedad con anterioridad, la probabilidad pedida será:

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{30}{120} \frac{29}{119} = \frac{1}{4} \frac{29}{119} = \frac{29}{476}$$

OPCIÓN B**Problema 1.** Sea el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x + y \leq 2 \\ -x + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

a) Resuélvelo gráficamente.

b) Halla el máximo y el mínimo de la función $z = 2x + y$ en el conjunto solución de dicho sistema.*Solución:*

a) Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \geq 1$

(b) $x + y \leq 2$

(c) $-x + y \leq 1$

(d) $x - y \leq 1$

$x + y = 1$

$x + y = 2$

$-x + y = 1$

$x - y = 1$

x	y
0	1
1	0

x	y
0	2
2	0

x	y
0	1
-1	0

x	y
0	-1
1	0

¿(0,0) cumple?

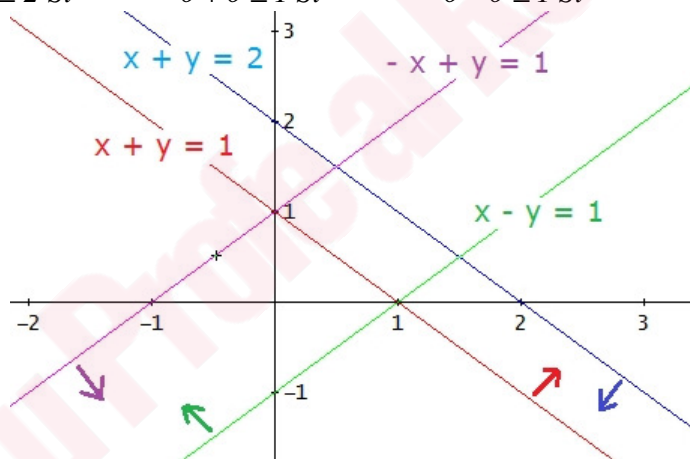
¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

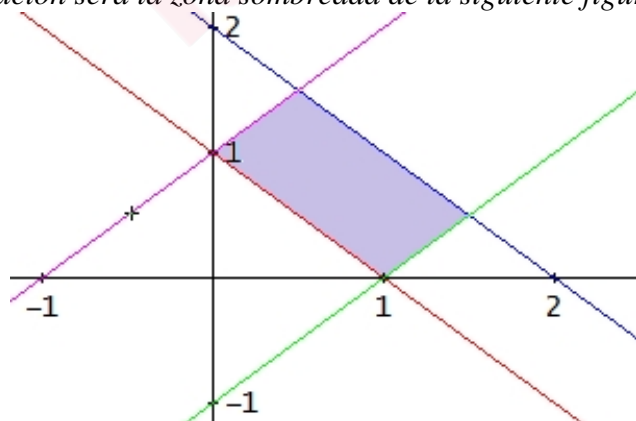
 $0 + 0 \geq 1$ No $0 + 0 \leq 2$ Sí $0 + 0 \leq 1$ Sí $0 - 0 \leq 1$ Sí

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

La solución será la zona sombreada de la siguiente figura:



b) Obtengamos los vértices de la región anterior.

Por construcción conocemos los siguientes vértices: $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$. Obtengamos los otros dos.

C, corte entre (b) y (d): $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $2x = 3$, luego $x = \frac{3}{2}$

sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $\frac{3}{2} + y = 2 \rightarrow y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

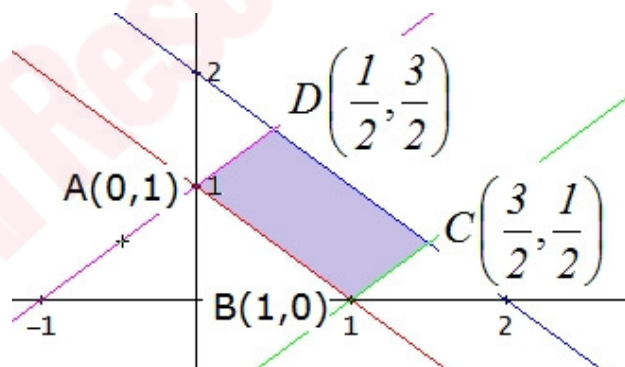
D, corte entre (b) y (c): $D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $2y = 3$, luego $y = \frac{3}{2}$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x + \frac{3}{2} = 2 \rightarrow x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Los vértices del conjunto solución del apartado a) son:



Sabemos que los extremos de la función z se alcanzan en los vértices del conjunto solución anterior. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 2x + y$	
$0, 1$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	mínimo
$1, 0$	$2 \cdot 1 + 0 = 2$	
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3'5$	máximo
$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2'5$	

La función $z = 2x + y$ alcanza el máximo, que vale $3'5$, en el punto $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y el mínimo, que vale 1 , en el punto $A(0, 1)$.

OPCIÓN B

Problema 2. Sea la función $f(x) = (x^2 + x)^2$. Se pide

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Las ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos locales.
- La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Como $f(x)$ es un polinomio al cuadrado, $f(x)$ puede calcularse para cualquier valor de x . Por lo tanto

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0 \rightarrow f(0) = (0^2 + 0)^2 = 0 \rightarrow (0,0)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)^2 = 0$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow (0,0) \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow (-1,0) \end{array} \right.$$

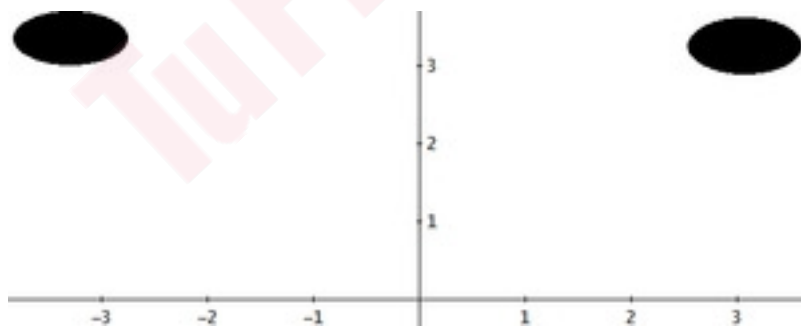
Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(-1, 0)$ y $(0, 0)$

b) Puesto que $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

Veamos si tiene horizontales,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x)^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)^2 = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no hay asíntota horizontal}$$

Estos límites no informan de la posición de la función en $-\infty$ y $+\infty$,



c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = 2(x^2 + x)(2x + 1) = (x^2 + x)(4x + 2) = 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 2x = 4x^3 + 6x^2 + 2x$$

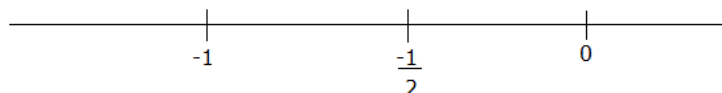
Estudiamos el signo de este polinomio buscando sus raíces,

$$4x^3 + 6x^2 + 2x = 0$$

$$2x(2x^2 + 3x + 1) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \\ = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + 1}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \\ x_2 = \frac{-3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases} \end{cases}$$

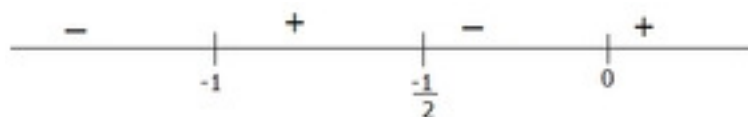
De la ecuación polinómica de tercer grado hemos obtenido sus tres raíces: -1 , $\frac{-1}{2}$ y 0 .

Ahora representamos en la recta real los valores de x obtenidos,



Conociendo el signo de $f'(x)$ en uno de los intervalos sabremos el signo en los restantes, los signos van alternando (por ser polinomio de tercer grado con tres raíces)

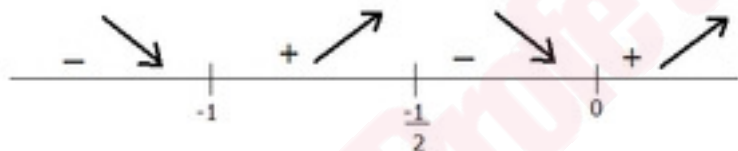
$$x = 1 \rightarrow f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 1 = 4 + 5 + 1 = 10 > 0, \text{ luego}$$



Y por lo tanto, $f(x)$ es creciente en $\left(-1, \frac{-1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio del apartado anterior sabemos que los extremos locales de $f(x)$ serán,



Mínimos locales:

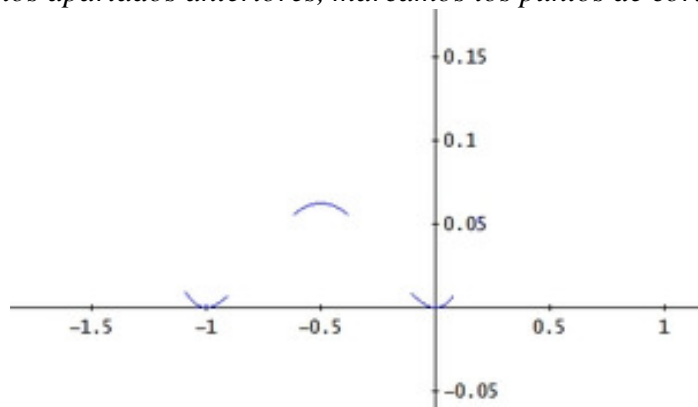
$$x = -1 \rightarrow f(-1) = ((-1)^2 + (-1))^2 = (1 - 1)^2 = 0 \rightarrow (-1, 0) \text{ Mínimo local}$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \text{ (calculado en a)} \rightarrow (0, 0) \text{ Mínimo local}$$

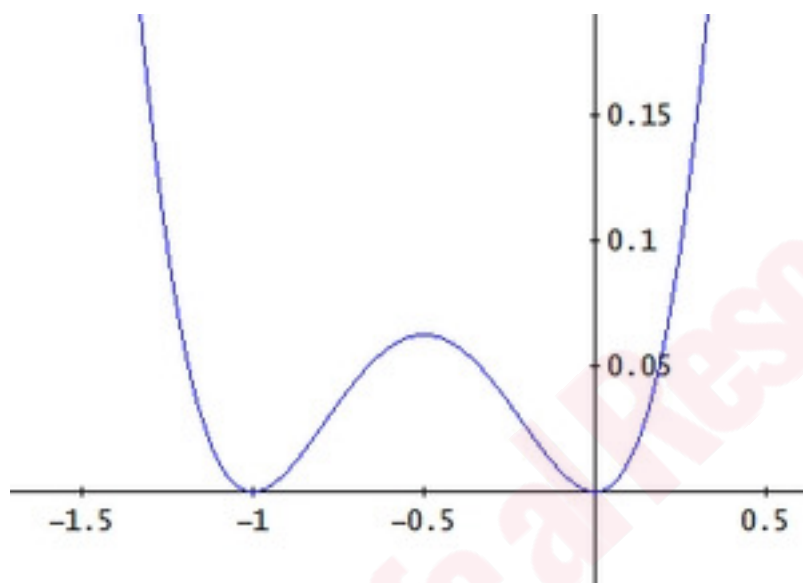
Máximo local:

$$x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-2}{4}\right)^2 = \left(\frac{-1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \rightarrow \\ \rightarrow \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{16}\right) \text{ Máximo local}$$

e) A partir de los apartados anteriores, marcamos los puntos de corte y los extremos locales



Considerando la monotonía de la función, su representación será:



OPCIÓN B

Problema 3. Una urna A contiene cinco bolas rojas y dos azules. Otra urna B contiene cuatro bolas rojas y una azul. Tomamos al azar una bola de la urna A y, sin mirarla, la pasamos a la urna B. A continuación extraemos con reemplazamiento dos bolas de la urna B. Halla la probabilidad de que:

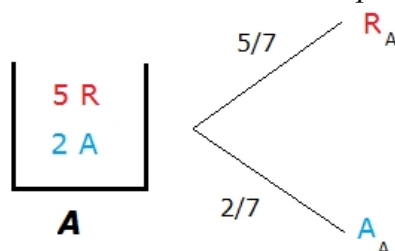
- Ambas bolas sean de color rojo.
- Ambas bolas sean de distinto color.
- Si la primera bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que hemos pasado de la urna A a la urna B haya sido azul?

Solución:

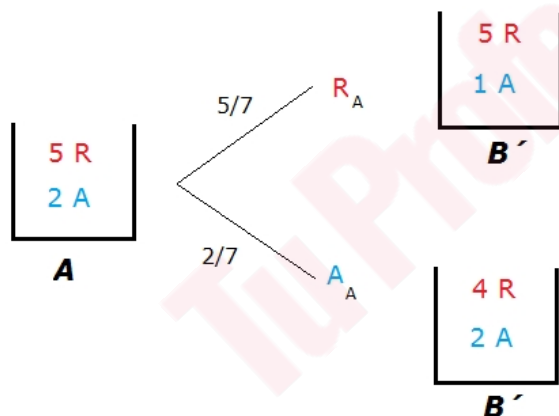
Tenemos una urna B cuyo contenido es



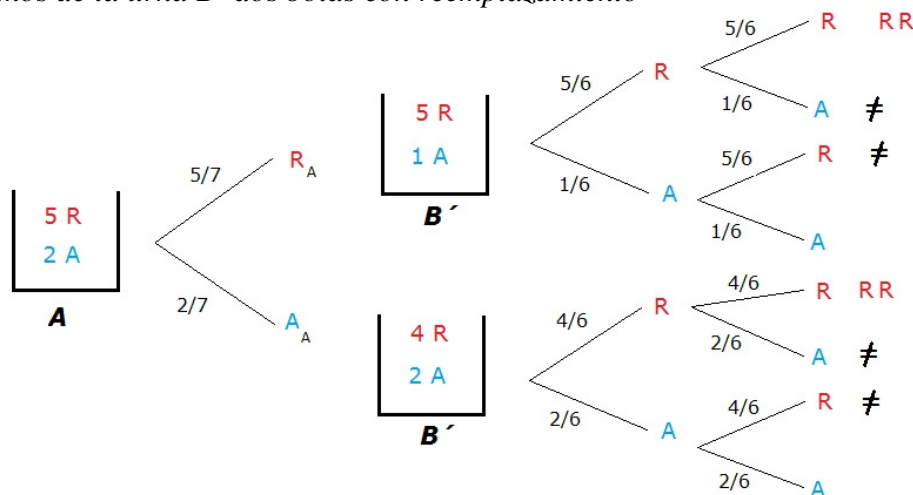
Empezamos con una urna A, de la que sacamos una bola que puede ser roja (R_A) o azul (A_A)



Esta bola la introducimos en el urna B, por lo que el contenido de la urna B cambiará, a la urna B modificada la llamamos B'



Extraemos de la urna B' dos bolas con reemplazamiento



El gráfico anterior es el árbol del problema para resolver los dos primeros apartados.

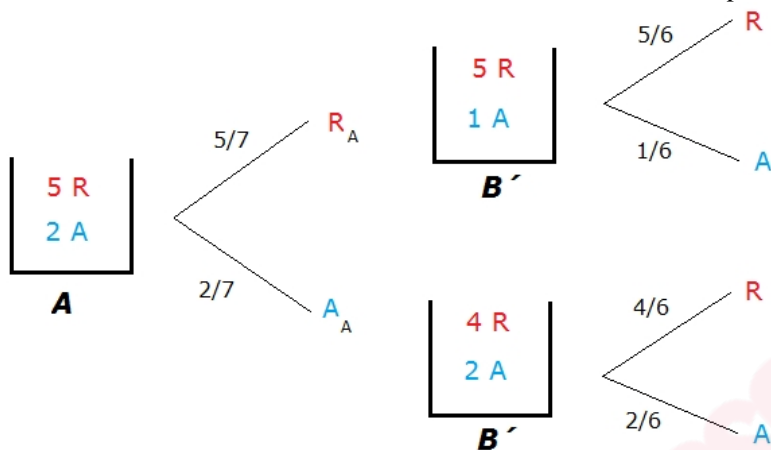
a) Llamando RR = ambas bolas sean de color rojo, la probabilidad a calcular es:

$$p(RR) = \frac{5}{7} \frac{5}{6} + \frac{2}{7} \frac{4}{6} = \frac{125}{252} + \frac{32}{252} = \frac{157}{252} = 0'6230$$

b) Llamando $\neq$ = ambas bolas sean de distinto color, la probabilidad a calcular es:

$$p(\neq) = \frac{5}{7} \frac{1}{6} + \frac{5}{7} \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \frac{4}{6} = \frac{25}{252} + \frac{25}{252} + \frac{16}{252} + \frac{16}{252} = \frac{82}{252} = 0'3254$$

c) En este apartado de la urna B' sólo sacamos una bola. El árbol del problema será:



Llamando: A_A = la bola pasada de la urna A a la B es azul

R = la bola extraída de B' es roja

la probabilidad a calcular es:

$$p\left(\frac{A_A}{R}\right) = \frac{p(A_A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{2}{7} \frac{4}{6}}{\frac{5}{7} \frac{5}{6} + \frac{2}{7} \frac{4}{6}} = \frac{\frac{8}{42}}{\frac{25}{42} + \frac{8}{42}} = \frac{\frac{8}{42}}{\frac{33}{42}} = \frac{8}{33} = 0'2424$$