

Problema 1.1. Dadas las matrices $B(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $C(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

- a) Calcular el determinante de la matriz $3B(x)$ y obtener el valor de x para el que dicho determinante vale 162. (1,8 puntos).
 b) Demostrar que la matriz $C(y)$ no tiene inversa para ningún valor real de y . (1,5 puntos).

Solución:

a)

$$|3B(x)| = 3^3 |B(x)| = 27 \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \text{desarrollando por la 1ª columna,}$$

$$= 27 \left[(x+2) \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - (2x+3) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (4x+4) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right] = 27[(x+2)(18-12) - (2x+3)(24-12) + (4x+4)(24-18)]$$

$$= 27[(x+2)6 - (2x+3)12 + (4x+4)6] = 27[6x+12 - 24x-36 + 24x+24] = 162x$$

$$162x = 162 \rightarrow x = \frac{162}{162} = 1$$

b) Calculemos su determinante,

$$|C(y)| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (3y+5) \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - (2y+3) \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (3y+4) \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (3y+5)(18-12) - (2y+3)(42-24) + (3y+4)(42-36) = (3y+5)6 - (2y+3)18 + (3y+4)6 =$$

$$= 18y+30-36y-54+18y+24 = 0$$

Como el determinante de $C(y)$ es nulo, no existe la matriz inversa de $C(y)$.

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ \alpha x + y + z = 9 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- a) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado. (2 puntos).
 b) Resolver el sistema anterior para $\alpha = 7$. (1,3 puntos).

Solución:

- a)
 Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la matriz ampliada,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

A es una matriz 3×3 , luego el máximo rango de A será 3

A' es una matriz 3×4 , luego su máximo rango será 3

Estudiemos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 + \alpha^2 - 5\alpha - 1 - 3\alpha = \alpha^2 - 8\alpha + 7$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = 7 \\ \frac{8-6}{2} = 1 \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 7$, $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D}$

Para $\alpha = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

En la matriz A la 1ª y 3ª filas son iguales, luego el máximo rango de A será 2,

$$\text{en } A \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

en A' , orlando el menor anterior, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad (1^\text{a} \text{ y } 3^\text{a} \text{ filas iguales}), \text{ luego } \text{ran}(A') = 2$$

$\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$, Sistema Compatible Indeterminado

Para $\alpha = 7$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

$$\text{en } A' \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 21 = -16 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

en A' , orlando el menor anterior, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9(5 + 3 + 49 - 35 - 1 - 21) = 9(57 - 57) = 0, \text{ luego } \text{ran}(A') = 2$$

$\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$, Sistema Compatible Indeterminado

Por lo tanto, para cualquier valor de α el sistema es siempre compatible.

El sistema es compatible indeterminado para $\alpha = 1$ y $\alpha = 7$.

b) Para $\alpha = 7$

El sistema a resolver es,

$$\begin{cases} x + 7y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ 7x + y + z = 9 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Del estudio realizado en el apartado anterior, sabemos que el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 7y = 9 - z \\ 3x + 5y = 9 - z \end{cases} \text{ por Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9-z & 7 \\ 9-z & 5 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{5(9-z) - 7(9-z)}{-16} = \frac{-2(9-z)}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9-z \\ 3 & 9-z \end{vmatrix}}{-16} = \frac{1(9-z) - 3(9-z)}{-16} = \frac{-2(9-z)}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

$$\text{Solución} \begin{cases} x = \frac{9-\lambda}{8} \\ y = \frac{9-\lambda}{8} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 2.1. Dadas las dos rectas **r** y **s**, que se cortan, de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \quad y \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}, \text{ se pide calcular:}$$

- a) El punto *P* de corte de las rectas **r** y **s**. (1,1 puntos).
 b) Un vector direccional de **r** y otro de **s**, (0,5 puntos), y el ángulo α que forman las rectas **r** y **s** en el punto de corte *P*. (0,6 puntos).
 c) La ecuación implícita $ax + by + cz + d = 0$ del plano π que contiene a las rectas **r** y **s** (1,1 puntos).

Solución:

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de *r* y *s*.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6}$$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{z-\frac{3}{2}}{3} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \frac{1}{2} - 3\lambda \\ z = \frac{3}{2} + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z-1}{4} \rightarrow s: \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = -\frac{3}{2} + \mu \\ z = 1 + 4\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Punto de corte entre *r* y *s*,

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = 3 - 2\mu \\ \frac{1}{2} - 3\lambda = -\frac{3}{2} + \mu \\ \frac{3}{2} + 3\lambda = 1 + 4\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -3\lambda - \mu = -2 \\ 3\lambda - 4\mu = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{El determinante de la} \\ \text{matriz ampliada de} \\ \text{este sistema es} \end{array} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -1/2 \end{vmatrix} = 1 + 24 - 12 + 6 - 16 - 3 = 0$$

Como en la matriz de coeficiente el menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4 \neq 0$ el sistema tiene solución única.

Las rectas se cortan en,

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -3\lambda - \mu = -2 \end{cases} \rightarrow 2x2^a \quad \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -6\lambda - 2\mu = -4 \end{cases}$$

$$-4\lambda = -2 \rightarrow \lambda = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será,

$$\begin{cases} x = 1 + 2\frac{1}{2} = 2 \\ y = \frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = -1 \\ z = \frac{3}{2} + 3\frac{1}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow P(2, -1, 3)$$

b)

$$\vec{v}_r = (2, -3, -3) \quad y \quad \vec{v}_s = (-2, 1, 4)$$

$$\text{siendo } \alpha = \angle(r, s) \rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{|(2, -3, -3) \cdot (-2, 1, 4)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{|-4 - 3 + 12|}{\sqrt{4 + 9 + 9} \sqrt{4 + 1 + 16}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{22} \sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{462}}$$

$$\text{luego } \alpha = 76'548...^\circ \approx 76'55^\circ$$

c)

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } P(2, -1, 3) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \vec{v}_r = (2, -3, -3) \\ \vec{v}_s = (-2, 1, 4) \end{cases} \end{cases}$$

la ecuación del plano será,

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ y+1 & -3 & 1 \\ z-3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-12-3) - (y+1)(8+6) + (z-3)(2-6) = 0$$

$$-15(x-2) - 14(y+1) - 4(z-3) = 0$$

$$-15x + 30 - 14y - 14 - 4z + 12 = 0$$

$$-15x - 14y - 4z + 28 = 0$$

$$15x + 14y + 4z - 28 = 0 \quad \text{esta es la ecuación del plano } \pi$$

Problema 2.2. Dados el punto $Q = (3, -1, 4)$ y la recta r de ecuación paramétrica

$r: x = -2 + 3\lambda, y = -2\lambda, z = 1 + 4\lambda,$ se pide:

- Hallar la distancia del punto Q a la recta r . (1,1 puntos).
- Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene a $(1, -1, 1)$ como vector direccional no corta a r . (1,1 puntos).
- Calcular la distancia entre las rectas r y s . (1,1 puntos).

Solución:

a)

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r Q} \times \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_r}|} \quad \text{siendo } P_r \text{ y } \overrightarrow{v_r} \text{ punto y vector director de } r.$$

$$P_r = (-2, 0, 1) \rightarrow \overrightarrow{P_r Q} = (5, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{v_r} = (3, -2, 4)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_r Q} \times \overrightarrow{v_r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(-4+6) - \vec{j}(20-9) + \vec{k}(-10+3) = 2\vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k} = (2, -11, -7) \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{P_r Q} \times \overrightarrow{v_r}| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 121 + 49} = \sqrt{174}$$

$$|\overrightarrow{v_r}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

$$d(Q, r) = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \text{ u. l.}$$

b)

$$s: \begin{cases} Q(3, -1, 4) \\ \overrightarrow{v_s}(1, -1, 1) \end{cases} \quad r: \begin{cases} P(-2, 0, 1) \\ \overrightarrow{v_r}(3, -2, 4) \end{cases}$$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 - (-2) \\ -2 & -1 & -1 - 0 \\ 4 & 1 & 4 - 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 10 - 4 + 20 + 3 + 6 = 6 \rightarrow \text{ran}(M') = 3 \rightarrow \text{las rectas se cruzan.}$$

c)

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}$$

$$|\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = |6| = 6$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_r \times \vec{v}_s &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2+4) - \vec{j}(3-4) + \vec{k}(-3+2) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = \\ &= (2, 1, -1)\end{aligned}$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$d(r,s) = \frac{|\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ}|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u. l.}$$

Tu Profe al Rescate

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ (1,6 puntos).

b) Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(1) = 1$. (1,7 puntos).

Solución:

a)

$$\text{Asíntotas de } y = \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$$

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

Por lo tanto no tiene asíntota horizontal.

Asíntota vertical.

Buscamos las posibles asíntotas verticales,

$$6x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{7+1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{7-1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Posibles a.v. } x = \frac{1}{2} \quad y \quad x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} &= \frac{12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\frac{1}{2} - 5}{0} = \frac{12\frac{1}{8} - 8\frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 5}{0} = \frac{12 - 16 + 36 - 40}{0} = \\ &= \frac{48 - 56}{0} = \frac{-8}{0} = \frac{-1}{0} = \infty \end{aligned}$$

luego $x = \frac{1}{2}$ es asíntota vertical.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} &= \frac{12\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9\frac{2}{3} - 5}{0} = \frac{12\frac{8}{27} - 8\frac{4}{9} + 6 - 5}{0} = \frac{\frac{96 - 96}{27} + 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$

luego $x = \frac{2}{3}$ es asíntota vertical.

Asíntota oblicua.

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = m x + n$ siendo,

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^3 - 7x^2 + 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 - 12x^3 + 14x^2 - 4x}{6x^2 - 7x + 2} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 5x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = 1$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es: $y = 2x + 1$

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$$

efectuemos la división polinómica

$$\begin{array}{r} 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 \quad | \quad 6x^2 - 7x + 2 \\ - 12x^3 + 14x^2 - 4x \quad \quad \quad 2x + 1 \\ \hline \quad \quad 6x^2 + 5x - 5 \\ \quad - 6x^2 + 7x - 2 \\ \hline \quad \quad \quad 12x - 7 \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = (2x + 1) + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}$$

$$H(x) = \int \left[(2x + 1) + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} \right] dx = x^2 + x + \ln |6x^2 - 7x + 2| + C$$

Como debe ser $H(1) = 1$

$$1 = 1^2 + 1 + \ln |6 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2| + C$$

$$1 = 1 + 1 + \ln |6 - 7 + 2| + C$$

$$1 = 2 + \ln |1| + C$$

$$1 = 2 + 0 + C \rightarrow 1 = 2 + C \rightarrow C = -1$$

$$\text{Por lo tanto } H(x) = x^2 + x - 1 + \ln |6x^2 - 7x + 2|$$

Problema 3.2. Se considera la función real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje OX. (2 puntos).

b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX. (1,3 puntos).

Solución:

a) Recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ y $x = 4$ debe ser paralela al eje OX

Es decir que la r.t. a $f(x)$ en $x = 2$ y $x = 4$ deben tener pendiente 0.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

pendiente de la r.t. a $f(x)$ en $x = 2$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 12 + 4a + b$$

pendiente de la r.t. a $f(x)$ en $x = 4$

$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 + 2a \cdot 4 + b = 48 + 8a + b$$

El sistema a resolver será

$$\begin{cases} 12 + 4a + b = 0 \\ 48 + 8a + b = 0 \end{cases} \quad \text{Multiplicando la 1ª ecuación por } -1 \quad \begin{cases} -12 - 4a - b = 0 \\ 48 + 8a + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{sumando } 36 + 4a = 0$$

$$a = -9$$

Sustituyendo el valor de a en la 1ª ecuación,

$$12 + 4(-9) + b = 0$$

$$12 - 36 + b = 0$$

$$-24 + b = 0$$

$$b = 24$$

Solución: $a = -9$ y $b = 24$

b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + c$, obtener el valor de c para que el punto de inflexión esté en el eje OX.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

$6x - 18 = 0$; $x = 3$ esta es la abscisa del punto de inflexión.

$$\text{Para } x = 3; f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + c = 27 - 81 + 72 + c = 18 + c$$

Como el punto de inflexión debe estar en el eje OX, $18 + c = 0$; $c = -18$

Solución: $c = -18$

La función que cumple las condiciones de los apartados a) y b) será:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$$

Problema 4.1. Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas

de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo. (3,3 puntos).

Solución:

La función que nos da el valor de la venta de la producción diaria es

$$V(x) = 100x + 250 \frac{40-5x}{10-x}$$

Busquemos el máximo de esta función,

$$\begin{aligned} V'(x) &= 100 + 250 \frac{-5(10-x) - (40-5x)(-1)}{(10-x)^2} = 100 + 250 \frac{-50 + 5x + 40 - 5x}{(10-x)^2} = 100 + 250 \frac{-10}{(10-x)^2} = \\ &= 100 - \frac{2500}{(10-x)^2} \\ 100 - \frac{2500}{(10-x)^2} &= 0 \\ 100 &= \frac{2500}{(10-x)^2} \\ 100(10-x)^2 &= 2500 \\ (10-x)^2 &= 25 \\ 10-x &= \pm\sqrt{25} \\ 10-x &= \pm 5 \begin{cases} 10-x=5 \rightarrow x=10-5=5 \\ 10-x=-5 \rightarrow x=10+5=15 \end{cases} \end{aligned}$$

La solución $x = 15$ no es válida ya que supera la producción máxima diaria (que es de 8 Tm)

Veamos que ocurre con la solución $x = 5$

$$V''(x) = -\frac{2500 \cdot 2(10-x)(-1)}{(10-x)^4} = \frac{-5000}{(10-x)^3}$$

$$\text{para } x=5, \quad V''(5) = \frac{-5000}{(10-5)^3} = \frac{-5000}{5^3} < 0$$

luego $V(x)$ tiene un máximo relativo en $x=5$. ¿Es el máximo de $V(x)$?

Por definición de la función $V(x)$, x puede tomar valores entre 0 y 8 (x son las toneladas de acero de baja calidad). Calculando los valores de $V(x)$ para $x=0$, $x=5$ y $x=8$ determinaremos el máximo.

$$x=0, \quad V(0) = 100 \cdot 0 + 250 \frac{40-5 \cdot 0}{10-0} = 250 \frac{40}{10} = 1000$$

$$x=5, \quad V(5) = 100 \cdot 5 + 250 \frac{40-5 \cdot 5}{10-5} = 500 + 250 \frac{15}{5} = 1250$$

$$x=8, \quad V(8) = 100 \cdot 8 + 250 \frac{40-5 \cdot 8}{10-8} = 800 + 250 \frac{0}{2} = 800$$

Por lo tanto el máximo se alcanza para $x=5$.

Queda demostrado que se deben producir 5 Tm de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.

Problema 4.2. Hallar las dimensiones del cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje OX . (3,3 puntos).

Solución:

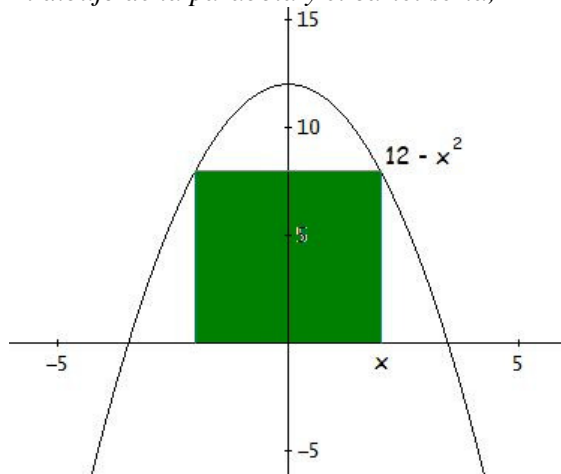
Para representar la parábola $y = 12 - x^2$ efectuamos los siguientes cálculos,

para $x = 0$, $y = 12$

para $y = 0$, $12 - x^2 = 0$; $12 = x^2$; $x = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3.46$

vértice $(0, 12)$

El dibujo de la parábola y el cartel sería,



El área del rectángulo será: $A(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$

Busquemos el máximo.

$$A'(x) = 24 - 6x^2$$

$$24 - 6x^2 = 0; \quad 6x^2 = 24; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm 2; \quad x = -2 \text{ no es válida, por definición } x \text{ debe ser positivo.}$$

Veamos si $x = 2$ es máximo

$$A''(x) = -12x$$

$$A''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0 \text{ luego máximo.}$$

Las dimensiones del cartel serán:

$$\text{base} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ u. l.}$$

$$\text{altura} = 12 - 2^2 = 12 - 4 = 8 \text{ u. l.}$$