

En el problema de distancia se minimiza el cuadrado de la distancia, que tiene los mismos puntos mínimos.

Opción A - Ejercicio 1

El área total cerrada de un cilindro es $2\pi r^2 + 2\pi rh = 54$. Despejamos la altura:

$$h = \frac{27}{\pi r} - r, \quad 0 < r < \sqrt{\frac{27}{\pi}}.$$

El volumen, expresado en función de una sola variable, es

$$V(r) = \pi r^2 h = 27r - \pi r^3.$$

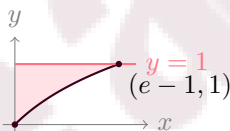
Los puntos críticos satisfacen $V'(r) = 27 - 3\pi r^2 = 0$, luego $r = 3/\sqrt{\pi}$. Además, $V''(r) = -6\pi r < 0$, así que se obtiene un máximo. Sustituyendo en la restricción:

$$r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ m}, \quad h = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \text{ m}.$$

Opción A - Ejercicio 2

El dominio de $\ln(x+1)$ es $x > -1$. La curva corta el eje OY en $(0,0)$ y la recta $y = 1$ en $(e-1, 1)$, pues $\ln(x+1) = 1$ equivale a $x+1 = e$. Entre $x = 0$ y $x = e-1$, la recta queda por encima de la curva, así que

$$\mathcal{A} = \int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)] dx = [2x + 1 - (x+1)\ln(x+1)]_0^{e-1} = \boxed{e-2}.$$



Opción A - Ejercicio 3

La primera y la tercera ecuaciones tienen el mismo término independiente. Al restarlas se obtiene $2\lambda x = 0$. Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = 0$. Las dos ecuaciones restantes son $y + z = 1$ y $\lambda y + z = 2$. Para $\lambda = 1$ son incompatibles; para $\lambda \neq 1$ tienen una solución única. Así, el sistema es SCD si $\lambda \neq 0, 1$ y SI si $\lambda = 1$. Para $\lambda = 0$, la primera y la tercera coinciden, mientras que queda $x + z = 2$ junto a $y + z = 1$. Hay dos ecuaciones independientes para tres incógnitas: los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada son ambos $2 < 3$, por lo que es SCI. Tomando $z = t$:

$$(x, y, z) = (2 - t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta tiene punto $Q = (1, -3, -1)$ y vector director $\vec{d} = (1, 2, 2)$. Proyectamos $A = (-3, 1, 6)$ sobre ella:

$$H = Q + t\vec{d}, \quad t = \frac{(A - Q) \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} = \frac{(-4, 4, 7) \cdot (1, 2, 2)}{9} = 2.$$

Así, $H = (3, 1, 3)$. Como H es el punto medio entre A y su simétrico A' , tenemos $A' = 2H - A$:

$$A' = (9, 1, 0).$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio es $[1, +\infty)$ y la gráfica cumple $y = \sqrt{x-1}$, equivalente a $x = 1 + y^2$ con $y \geq 0$. Para minimizar la distancia a $A = (2, 0)$ minimizamos su cuadrado:

$$d^2 = (x-2)^2 + y^2 = (y^2-1)^2 + y^2 = y^4 - y^2 + 1.$$

Derivamos respecto de y : $4y^3 - 2y = 2y(2y^2 - 1) = 0$. En $y = 0$ se obtiene $d = 1$; en $y = 1/\sqrt{2}$, $d^2 = 3/4$, que es menor. Además, $d \rightarrow \infty$ cuando $y \rightarrow \infty$, por lo que el mínimo global es

$$P = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad d(A, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Con el cambio $t = e^x$, $dt = e^x dx$. El denominador se transforma en $(t^2 - 1)(t + 1) = (t - 1)(t + 1)^2$, de modo que

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x + 1)} dx = \int \frac{dt}{(t - 1)(t + 1)^2}.$$

Descomponemos:

$$\frac{1}{(t - 1)(t + 1)^2} = \frac{1}{4(t - 1)} - \frac{1}{4(t + 1)} - \frac{1}{2(t + 1)^2}.$$

Integrando y volviendo a $t = e^x$:

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + \frac{1}{2(e^x + 1)} + C.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz A es invertible exactamente cuando su determinante no es cero. Factorizamos:

$$A^2 + 3A = A(A + 3I), \quad \det(A^2 + 3A) = \det(A) \det(A + 3I) = -2(\lambda + 1)(\lambda + 4).$$

Por tanto, no tiene inversa para $\lambda = -1, -4$. Para $\lambda = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^2 = I$, luego $A^{-1} = A$. La ecuación $AX + A = 2I$ da

$$X = A^{-1}(2I - A) = A(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r tiene dirección $(1, -1, -1)$. El plano paralelo a r que pasa por A y B contiene además $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 1)$. Un vector normal se obtiene con el producto vectorial de estos dos vectores:

$$(1, 1, 1) \times (1, -1, -1) = (0, 2, -2).$$

Con el punto $A(1, 0, -1)$, la ecuación general del plano es

$$y - z - 1 = 0.$$

La recta PQ tiene director $Q - P = (2, 2, 0)$. El punto $P = (1, 2, 1)$ satisface el plano, pero $Q = (3, 4, 1)$ no, pues $4 - 1 - 1 = 2$. Por tanto, la recta no está contenida en ese plano:

$$PQ \not\subset \pi.$$