

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)
- Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 puntos)
- El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿ α ? / el sistema sea compatible y determinado

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Entonces, $\text{ran}(A) = 3$ y, como el máximo rango de A' es 3, $\text{ran}(A') = 3$,

luego $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Por tanto, el sistema es compatible y determinado $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$

Según lo estudiado anteriormente, el sistema es compatible y determinado. Lo resolveremos por Cramer.

La matriz ampliada del sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right)$ y $|A|$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{10 - 2 - 15}{-1} = \frac{-7}{-1} = 7 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{50 - 6 - 45 + 5}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 - 6 + 10}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

Cuando $\alpha = -1$ la solución del sistema es: $x = 7$, $y = -4$, $z = -5$.

c) Habrá que estudiar el sistema formado por las tres ecuaciones iniciales y la ecuación de la condición.

Es decir, el sistema a estudiar es:

$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

La matriz ampliada de este sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

A es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 4×4 , por tanto el máximo rango de A' es 4.

Empezamos estudiando el rango de A',

$$\begin{aligned} |A'| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} C_1 - C_2 \\ C_3 - C_2 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{ \text{desarrollando por la 4ª fila} \} = \\ &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = -2(\alpha + 1) + 6\alpha + 20 + 4\alpha - 20 - 3(\alpha + 1) = -2\alpha - 2 + 10\alpha - 3\alpha - 3 = 5\alpha - 5 \end{aligned}$$

$$5\alpha - 5 = 0; \quad 5\alpha = 5; \quad \alpha = 1$$

Si $\alpha \neq 1$, $\text{ran}(A') = 4$ y como el máximo rango de A es 3, el sistema sería incompatible.

Si $\alpha = 1$, $\text{ran}(A') \leq 3$

el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0$ y este menor es de A y A', por tanto

$$\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado.}$$

Para que el sistema tenga una solución que verifique $x + y + z = 0$ debe ser $\alpha = 1$.

PROBLEMA A.2. Se tienen el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La distancia del punto P al plano π . (3 puntos)
- El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C , obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 puntos)
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C . (3 puntos)

Solución:

a) $\pi: 2x + y + 2z = 8; \quad \pi: 2x + y + 2z - 8 = 0$ y $P(10, 0, 10)$

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 10 + 0 + 2 \cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|32|}{3} = \frac{32}{3} \cong 10'6667$$

La distancia del punto P al plano π es de $\frac{32}{3}$ u.l. (aproximadamente 10'6667 u.l.).

b) Calculemos los puntos A, B y C .

$$A = \pi \cap \text{Eje } OX$$

$$\text{Eje } OX : \begin{cases} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v} (1,0,0) \end{cases} \rightarrow \text{Eje } OX : \begin{cases} x = 0 + 1\lambda \\ y = 0 + 0\lambda \\ z = 0 + 0\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Eje } OX : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2\lambda + 0 + 2 \cdot 0 = 8; 2\lambda = 8; \lambda = 4$

Por tanto, $A(4, 0, 0)$

$$B = \pi \cap \text{Eje } OY$$

$$\text{Eje } OY : \begin{cases} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v} (0,1,0) \end{cases} \rightarrow \text{Eje } OY : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2 \cdot 0 + \lambda + 2 \cdot 0 = 8; \lambda = 8$

Por tanto, $B(0, 8, 0)$

$$C = \pi \cap \text{Eje } OZ$$

$$\text{Eje } OZ : \begin{cases} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v} (0,0,1) \end{cases} \rightarrow \text{Eje } OZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2 \cdot 0 + 0 + 2\lambda = 8; 2\lambda = 8; \lambda = 4$

Por tanto, $C(0, 0, 4)$

El área del triángulo de vértices A, B, C la calculamos mediante la fórmula $A_T = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-4, 8, 0), \quad \vec{AC} = (-4, 0, 4), \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 32\vec{i} + 16\vec{j} + 32\vec{k} = (32, 16, 32) \end{aligned}$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2} = 48; \quad A_T = \frac{1}{2} 48 = 24 \text{ u.a.}$$

El área del triángulo pedida es 24 u.a.

c) Volumen del tetraedro.

Calculamos los vectores $\vec{AP} = (6, 0, 10)$, $\vec{BP} = (10, 8, 10)$ y $\vec{CP} = (10, 0, 6)$

$$V_{tetra} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & 8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |288 - 800| = \frac{512}{6} = \frac{256}{3} \cong 85'3333$$

El volumen del tetraedro pedido es $\frac{256}{3}$ u.v. (aproximadamente 85'3333 u.v.).

Tu Prof te al Rescate

PROBLEMA A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El dominio de la función h . Los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. (1 + 2 puntos)
- La asíntota de la curva $y = h(x)$. (4 puntos)
- La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x) dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (4 puntos)

Solución:

a) Dominio de $h(x)$

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ Sin solución}$$

Por tanto, $\text{Dom } h(x) = \mathcal{R}$

Calculemos los límites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \frac{-3}{5}$$

b) Asíntota de $y = h(x)$.

Como $\text{Dom } h(x) = \mathcal{R}$, $y = h(x)$ no tiene asíntota vertical.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $y = h(x)$ no tiene asíntota horizontal

Obtenemos la asíntota oblicua, (puede ser de dos formas)

- La función $h(x)$ es un cociente de dos polinomios tales que $\text{grad}(\text{num}) - \text{grad}(\text{den}) = 3 - 2 = 1$, luego tiene asíntota oblicua. Cálculo de la asíntota (efectuamos la división polinómica),

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 5x - 3 \\ \underline{-x^3 - 2x^2 - 5x} \\ -x^2 - 3x - 3 \\ \underline{+x^2 + 2x + 5} \\ 2x + 2 \end{array}$$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x - 1$

- La asíntota oblicua es $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3 - x^3 - 2x^2 - 5x}{x^2 + 2x + 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1) = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x - 1$

$$c) \int \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} dx =$$

Considerando la división polinómica realizada en el apartado anterior,

$$\int \left(x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + 2x + 5| + C$$

Calculemos el área de la superficie.

Debemos realizar una representación gráfica del área a calcular.

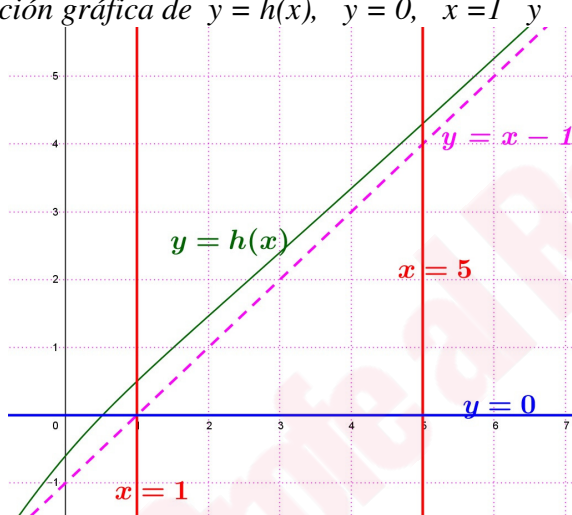
El segundo límite calculado en el apartado a) nos informa que $h(x)$ pasa por $(0, -3/5)$.

De la función $h(x)$ conocemos su asíntota oblicua $y = x - 1$.

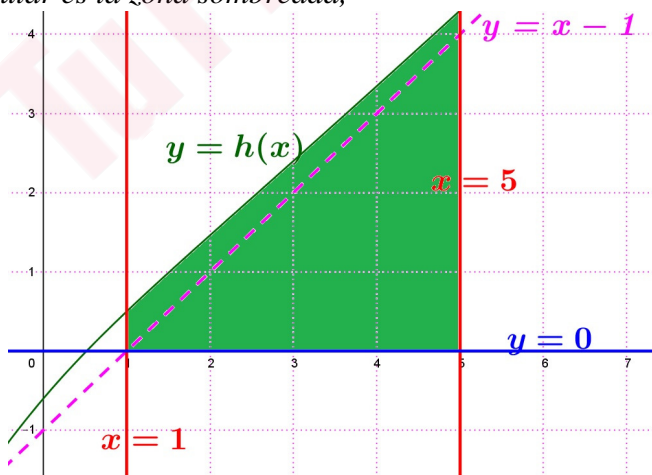
Calculemos,

x	$h(x)$	$x - 1$
1	$\frac{1^3 + 1^2 + 5 \cdot 1 - 3}{1^2 + 2 \cdot 1 + 5} = \frac{4}{8} = 0.5$	$1 - 1 = 0$
5	$\frac{5^3 + 5^2 + 5 \cdot 5 - 3}{5^2 + 2 \cdot 5 + 5} = \frac{172}{40} = 4.3$	$5 - 1 = 4$

La representación gráfica de $y = h(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 5$ es



El área a calcular es la zona sombreada,



El cálculo del área es mediante la integral definida,

$$\begin{aligned} \int_1^5 h(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + 2x + 5| \right]_1^5 = \left(\frac{5^2}{2} - 5 + \ln|5^2 + 2 \cdot 5 + 5| \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 + \ln|1^2 + 2 \cdot 1 + 5| \right) = \\ &= \frac{15}{2} + \ln 40 + \frac{1}{2} - \ln 8 = 8 + \ln \frac{40}{8} = 8 + \ln 5 \end{aligned}$$

El área pedida es de $(8 + \ln 5)$ u.a. (aproximadamente 9.6094 u.a.)

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $A X = \alpha X$ solo admite una solución. (4 puntos)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $A X = 5 X$. (3 puntos)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A X = 2 X$ y, sin

calcular la matriz A^{100} , obtener el valor de β tal que $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 puntos)

Solución:

a) ¿ α ? / $A X = \alpha X$ solo tiene una solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 4y = \alpha x \\ -x + 6y = \alpha y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1 - \alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (6 - \alpha)y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo, tendrá solución única (la trivial $x = y = 0$) cuando $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 - \alpha & 4 \\ -1 & 6 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha)(6 - \alpha) + 4 = 6 - \alpha - 6\alpha + \alpha^2 + 4 = \alpha^2 - 7\alpha + 10$$

$$\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{7+3}{2} = 5 \\ \alpha_2 = \frac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación matricial $A X = \alpha X$ solo admite una solución cuando $\alpha \in \mathbb{R} \sim \{2, 5\}$.

b) Soluciones de $A X = 5 X$

Según lo resuelto anteriormente, el sistema que queda es:

$$\begin{cases} (1-5)x + 4y = 0 \\ -x + (6-5)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \text{simplificando la primera ecuación por 4,} \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Como las dos ecuaciones son iguales, la solución es $-x + y = 0$; $y = x$

Por tanto, la solución es $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

c) ¿ $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Comprobemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ -1 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{c.q.c.}$$

$$\text{¿}\beta\text{? / } A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculemos $A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Demostremos, por inducción, que $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

De los cálculos anteriores hemos comprobado que se cumple para $n = 1$ y $n = 2$, supongamos que se cumple para n y comprobemos que se cumple para $n + 1$

$$A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = A A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = A \left[A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = A \left[2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 2^n A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2^n \cdot 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c.q.c$$

Por tanto, para $n = 100$, $A^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; en consecuencia $\beta = 2^{100}$.

Tu Profecía al Rescate

PROBLEMA B.2. Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β . (5 puntos)
- La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (4 puntos)
- La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π . (2 puntos)

Solución:

a) Posición relativa de r y π en función de α y β .

Podemos resolverlo de dos formas:

$$1. \text{ Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta } r, r: \begin{cases} x = \alpha - \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = \beta \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano π :

$$(\alpha - \lambda) + 2 \cdot (-4\lambda) + 3\beta\lambda = 6, \text{ (la incógnita es } \lambda \text{)}$$

$$\alpha - \lambda - 8\lambda + 3\beta\lambda = 6$$

$$\alpha - 9\lambda + 3\beta\lambda = 6$$

$$\alpha + (3\beta - 9)\lambda = 6$$

$$(3\beta - 9)\lambda = 6 - \alpha \rightarrow \begin{cases} 3\beta - 9 = 0 \rightarrow 3\beta = 9 \rightarrow \beta = 3 \\ 6 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 6 \end{cases}$$

Si $\beta \neq 3$, $3\beta - 9 \neq 0$ y por tanto la ecuación tiene como solución $\lambda = \frac{6 - \alpha}{3\beta - 9}$, luego r y π se cortan en un punto.

Si $\beta = 3$, la ecuación queda $0 \cdot \lambda = 6 - \alpha \rightarrow 0 = 6 - \alpha$

si $\alpha \neq 6 \rightarrow 0 = (6 - \alpha) \neq 0$, la ecuación no tiene solución, r y π son paralelos.

si $\alpha = 6 \rightarrow 0 = 0$, la ecuación tiene infinitas soluciones, r está contenida en π

2. Escribimos la recta r como intersección de dos planos,

$$r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} \rightarrow \frac{x-\alpha}{1} = \frac{y}{4} \rightarrow 4x - 4\alpha = y \rightarrow 4x - y = 4\alpha \\ \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \rightarrow \beta y = -4z \rightarrow \beta y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} 4x - y = 4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de r y π estudiando el sistema formado por sus ecuaciones,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x - y = 4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 4\alpha \\ 0 & \beta & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Estudiamos la posición relativa de r y π estudiando el sistema formado por sus ecuaciones,

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \end{vmatrix} = -4 + 12\beta - 32 = 12\beta - 36$$

$$12\beta - 36 = 0 \rightarrow 12\beta = 36 \rightarrow \beta = 3$$

Si $\beta \neq 3$, $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{sistema compatible determinado}$
 $\rightarrow r \text{ y } \pi \text{ se cortan en un punto.}$

Si $\beta = 3$,

La matriz ampliada del sistema será: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 4\alpha \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$ y sabemos que $|A| = 0$.

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Rango de A' ,

Falta estudiar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4\alpha \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4\alpha \end{vmatrix} = -3(4\alpha - 24)$

$$-3(4\alpha - 24) = 0 \rightarrow 4\alpha - 24 = 0 \rightarrow 4\alpha = 24 \rightarrow \alpha = 6$$

si $\alpha \neq 6 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq 2 = \text{ran}(A)$, sistema incompatible, r y π son paralelos.

si $\alpha = 6 \rightarrow \text{ran}(A') = \text{ran}(A) = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$, sistema compatible indeterminado, r está contenida en π .

De ambas formas el resultado obtenido es:

Si $\beta \neq 3$, r y π se cortan en un punto.

Si $\beta = 3$ y $\alpha \neq 6$ r y π son paralelos.

Si $\beta = 3$ y $\alpha = 6$ r está contenida en π

b) Según lo estudiado anteriormente para $\alpha = 6$ y $\beta = 3$, la recta r está contenida en el plano π , luego $d(r, \pi) = 0$.

c) ¿Plano σ ? $(0,0,0) \in \sigma$ y $\pi \cap \sigma = \emptyset$.

El plano σ que no corta al plano π debe ser paralelo a él, por tanto la ecuación de σ será: $x + 2y + 3z = D$

Como el punto $(0,0,0) \in \sigma \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = D \rightarrow D = 0$

Y, la ecuación del plano pedido es: $x + 2y + 3z = 0$.

PROBLEMA B.3. un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 puntos)
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 puntos)

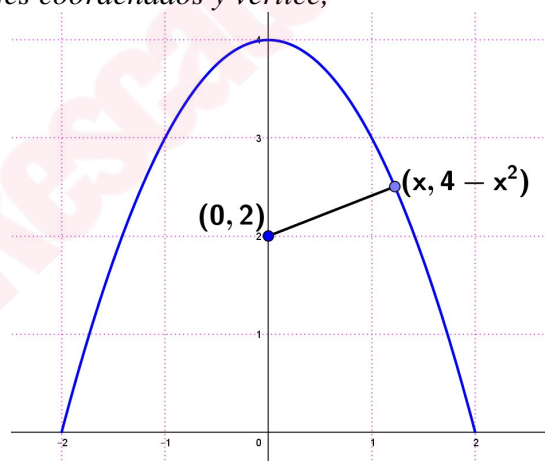
Solución:

La representación gráfica del problema es:

$y = 4 - x^2$ es una parábola, calculemos puntos de corte con ejes coordenados y vértice,
 $x = 0, y = 4 \quad (0, 4)$

$$y = 0, \quad 4 - x^2 = 0, \quad 4 = x^2, \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \begin{cases} (-2, 0) \\ (2, 0) \end{cases}$$

$$\text{Vértice } x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} = 0 \quad (0, 4)$$



$$a) \quad d((0, 2), (x, 4 - x^2)) = \sqrt{(x - 0)^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

La función pedida es $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad -2 \leq x \leq 2$

b) Debemos buscar el máximo absoluto de la función anterior.

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad -2 \leq x \leq 2$$

Teniendo en cuenta que en el cálculo inicial de $f(x)$ el radicando es la suma de dos términos al cuadrado, este radicando es siempre positivo.

Para encontrar el máximo absoluto de $f(x)$ necesitamos obtener sus extremos relativos.

Considerando que si $h(x) = \sqrt{g(x)}$ siendo $g(x) > 0$ entonces como $h'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, entonces el

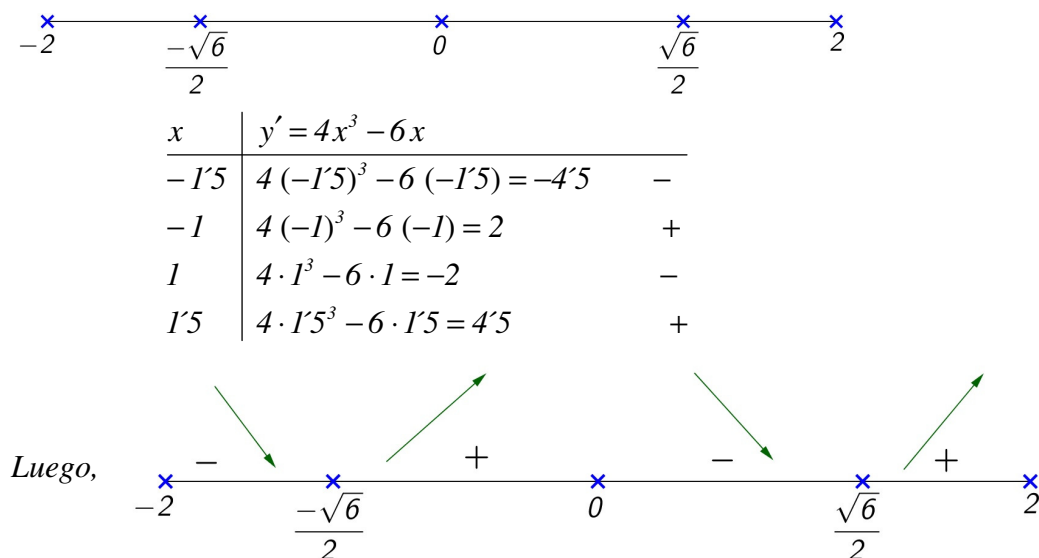
signo de $h'(x)$ coincide con el signo de $g'(x)$. Es decir, para calcular los extremos relativos de $h(x)$ basta con obtener los de $g(x)$

Luego, los extremos relativos de $f(x)$ son lo de $y = x^4 - 3x^2 + 4$. Calculemoslos,

$$y = x^4 - 3x^2 + 4, \quad y' = 4x^3 - 6x$$

$$4x^3 - 6x = 0, \quad x(4x^2 - 6) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 6 = 0, \quad 4x^2 = 6, \quad x^2 = \frac{6}{4}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{6}{4}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1.2247 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de y' en los siguientes intervalos



El máximo relativo de y está en $x = 0$, por tanto el máximo relativo de $f(x)$ está en $x = 0$. Pero como $f(x)$ está definida en un intervalo debemos obtener el valor de $f(x)$ en los extremos para determinar el máximo absoluto,

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
-2	$\sqrt{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} = 2.8284$
0	$\sqrt{0^4 - 3 \cdot 0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$
2	$\sqrt{2^4 - 3 \cdot 2^2 + 4} = \sqrt{8} = 2.8284$

El máximo absoluto de $f(x)$ se alcanza en $x = -2$ y $x = 2$.

Por lo que, los puntos de la curva a mayor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ son los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ {para los valores de x obtenidos, los puntos los calculamos en el apartado a)}.

c) Obtengamos el mínimo absoluto de $f(x)$.

De lo estudiado en el apartado anterior sabemos que los mínimos relativos están en $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$. Como a la izquierda de ellos la función es decreciente y a la derecha creciente, el mínimo absoluto será alguno de ellos. Calculemos $f(x)$ para estos valores de x ,

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

El mínimo absoluto se alcanza en los dos valores.

Calculemos los puntos de la curva correspondientes,

x	$y = 4 - x^2$
$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

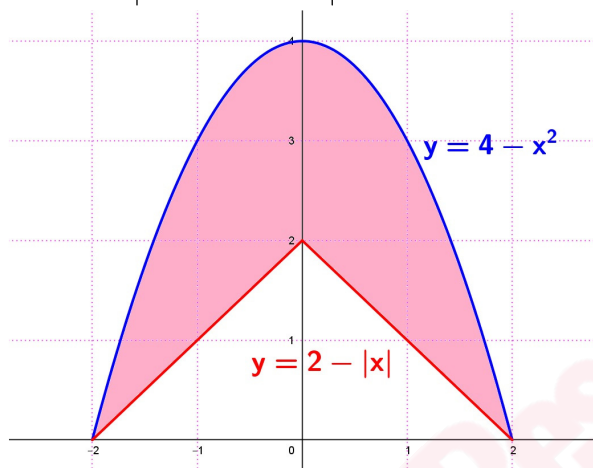
Finalmente, los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ son $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

d) Representemos la superficie de la que debemos calcular su área. {sabemos que $-2 \leq x \leq 2$ }
 $y = 4 - x^2$ la representamos en el apartado a)

$$y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x, & x > 0 \\ 2 + x, & x \leq 0 \end{cases}$$

x	$2 - x$	x	$2 + x$
0	2	0	2
2	0	-2	0

La representación es,



Esta figura es simétrica respecto del eje OY ya que,

1) $g(x) = 4 - x^2$
 $g(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 \rightarrow g(x) = g(-x)$

2) $h(x) = 2 - |x|$
 $h(-x) = 2 - |-x| = 2 - |x| \rightarrow h(x) = h(-x)$

Calculamos:

$$\int_0^2 (4 - x^2) - (2 - x) dx = \int_0^2 (4 - x^2 - 2 + x) dx = \int_0^2 (2 - x^2 + x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{10}{3}$$

Y $A_s = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \text{ u.a.}$

El área de la superficie pedida es $\frac{20}{3} \text{ u.a.}$

* * *

En caso de no observar la simetría de la figura, el cálculo sería,

$$A_1 = \int_0^2 ((4 - x^2) - (2 - x)) dx \quad \text{y} \quad A_2 = \int_0^2 ((4 - x^2) - (2 - x)) dx$$

Y $A_s = A_1 + A_2.$