



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función continua $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 4x^2 + a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b + \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi/2} (2\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)) dx$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x| - 2$ y por $g(x) = 4 - x^2$.

- a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan. **(1 punto)**
- b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ , el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. **(1.75 puntos)**

b) Resuelve el sistema $(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que $x = 2$.

(0.75 puntos)

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula m para que AB no tenga inversa. **(1 punto)**

b) Estudia el rango de la matriz BA según los valores de m . **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

a) Halla el plano que contiene a r y es paralelo a s . **(1.5 puntos)**

b) Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a s contiene a r . **(1 punto).**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,2,3)$, $B(-2,4,-3)$ y $C(-10,1,0)$.

a) Halla el área del triángulo de vértices A , B y C . **(1.25 puntos)**

b) Halla el plano que equidista de A y B . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función continua $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 4x^2 + a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b + \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b .

La función debe ser continua en $x = 0$.

Calculamos los límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \frac{\ln(e^0 + 0^3)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = \frac{e^0 + 3 \cdot 0^2}{e^0 + 0^3} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 + a = 4 \cdot 0^2 + a = a$$

Obligamos a que sea continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= a \\ f(0) &= a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

La función debe ser continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x^2 + a = 4 \cdot 1^2 + a = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} b + \operatorname{sen}(\pi x) = b + \operatorname{sen}(\pi) = b \\ f(1) &= 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{4 + a = b}$$

Como $a = 1$ entonces $4 + 1 = b \Rightarrow b = 5$.

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 5$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

- a) El dominio de la función son todos los números reales, pues el denominador no se anula nunca.

$$e^{2x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = -1 \Rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ la función exponencial siempre es positiva.}$$

Asíntota vertical. $x = a$.

No existen, pues el dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos la situación cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \boxed{1} \end{aligned}$$

Estudiamos la situación cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = \boxed{-1}$$

La asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ es la recta $y = 1$.

La asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ es la recta $y = -1$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntotas horizontales no tiene asíntota oblicua.

- b) Hallamos la derivada de la función y estudiamos su variación de signo.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2e^{4x} + 2e^{2x} - 2e^{4x} + 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

La derivada es siempre positiva, pues el numerador es una función exponencial ($4e^{2x}$) y el denominador está elevado al cuadrado y además la expresión $(e^{2x} + 1)$ es siempre positiva.

La función es creciente en todo $\mathbb{R}$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi/2} (2\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)) dx$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int (2\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)) dx &= \int (2\operatorname{sen}^2(x) - (1 - \operatorname{sen}^2(x))) dx = \\ &= \int 2\operatorname{sen}^2(x) - 1 + \operatorname{sen}^2(x) dx = \int 3\operatorname{sen}^2(x) - 1 dx = \int 3\operatorname{sen}^2(x) dx - \int 1 dx = \\ &= 3 \int \operatorname{sen}^2(x) dx - x = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2(x) dx &= \int \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \operatorname{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x) dx \\ dv = \operatorname{sen}(x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) \end{array} \right\} = \\ &= \operatorname{sen}(x)(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) \cos(x) dx = -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx = \\ &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int 1 - \operatorname{sen}^2(x) dx = -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int 1 dx - \int \operatorname{sen}^2(x) dx = \\ &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x) dx \\ \int \operatorname{sen}^2(x) dx &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x) dx \Rightarrow 2 \int \operatorname{sen}^2(x) dx = -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + x \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \operatorname{sen}^2(x) dx &= \frac{x - \operatorname{sen}(x) \cos(x)}{2} \end{aligned}$$

$$\dots = 3 \frac{x - \operatorname{sen}(x) \cos(x)}{2} - x = \frac{3x - 3\operatorname{sen}(x) \cos(x) - 2x}{2} = \boxed{\frac{x - 3\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{2} + K}$$

Usamos este resultado para determinar el valor de la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)) dx &= \left[\frac{x - 3\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \left[\frac{\pi/2 - 3\operatorname{sen}(\pi/2) \cos(\pi/2)}{2} \right] - \left[\frac{0 - 3\operatorname{sen}(0) \cos(0)}{2} \right] = \boxed{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x| - 2$ y por $g(x) = 4 - x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

(1 punto)

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

a) La función $f(x) = |x| - 2$ es una función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Buscamos los puntos de corte.

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = 4 - x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x-2 = 4-x^2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 24}}{2} = \\ = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \notin (-\infty, 0) \\ \frac{1-5}{2} = -2 \in (-\infty, 0) \end{cases} \\ x-2 = 4-x^2 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 24}}{2} = \\ = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \in [0, +\infty) \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \notin [0, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte de ambas gráficas se producen en $x = -2$ y en $x = 2$.

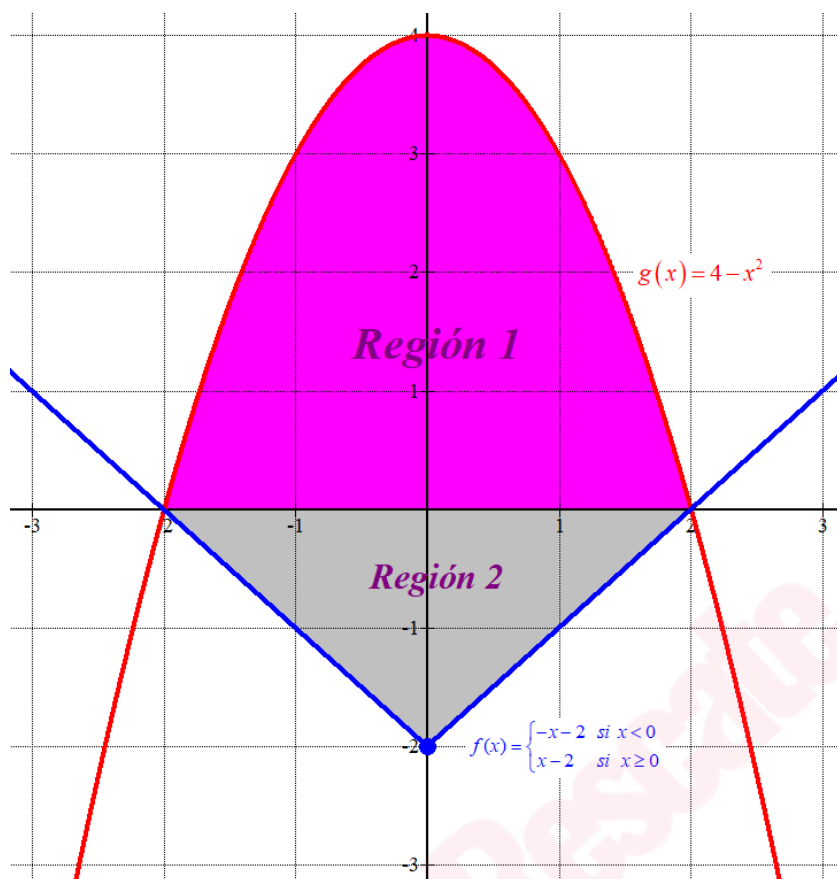
Para dibujar sus gráficas hacemos una tabla de valores de cada una. Sabemos que una es una función a trozos (dos trozos de recta que cambia en $x = 0$) y la otra es una parábola.

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

x	$f(x)$
-2	0
-1	-1
0	-2
1	-1
2	0

$$g(x) = 4 - x^2$$

x	$g(x)$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0



- b) El recinto que limitan las dos gráficas tiene dos partes diferenciadas.
La región 2 situada por debajo del eje de abscisas (de color gris) es un triángulo de base 4 y altura 2, por lo que:

$$\text{Área de la región 2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2.$$

La región 1 es la limitada entre la gráfica de la función $g(x) = 4 - x^2$ y el eje de abscisas. Calculamos su área con una integral definida de la función entre -2 y 2 .

$$\begin{aligned} \text{Área de la región 1} &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left[4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] = \\ &= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{32}{3} \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$\text{Área total} = 4 + \frac{32}{3} = \frac{44}{3} \approx 14.67 \text{ u}^2$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ , el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. **(1.75 puntos)**

b) Resuelve el sistema $(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que $x = 2$.

(0.75 puntos)

a) Determinamos la expresión de $A - \lambda I$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Hallamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda) - 2 - 2 + \lambda =$$

$$= (4 + \lambda^2 - 4\lambda)(4 - \lambda) - 4 + \lambda = 16 + 4\lambda^2 - 16\lambda - 4\lambda - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4 + \lambda$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 8 & -19 & 12 \\ 1 & & -1 & 7 & -12 \\ \hline & -1 & 7 & -12 & 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\lambda=1} \text{ es raíz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 7\lambda - 12) \Rightarrow$$

$$-\lambda^2 + 7\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-1)(-12)}}{-2} = \frac{-7 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-7+1}{-2} = \boxed{3 = \lambda} \\ \frac{-7-1}{-2} = \boxed{4 = \lambda} \end{cases}$$

Estudiamos cuatro casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 1$; $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 4$

En este caso el determinante de $A - \lambda I$ es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de $A - \lambda I = A - I$ es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$. El rango de $A - I$ es 2.

CASO 3. $\lambda = 3$

En este caso el determinante de $A - \lambda I = A - 3I$ es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. El rango de $A - 3I$ es 2.

CASO 4. $\lambda = 4$

En este caso el determinante de $A - \lambda I$ es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$. El rango de $A - 4I$ es 2.

Resumiendo: Si $\lambda \neq 1$; $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 4$ el rango de $A - \lambda I$ es 3. Si $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ o $\lambda = 4$ el rango de $A - \lambda I$ es 2.

b) Hallamos la expresión del sistema y lo resolvemos.

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{x = -2z} \\ \Rightarrow -x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2z + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array} \Rightarrow y + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -3z}$$

La solución es $x = -2t$, $y = -3t$, $z = t$; $t \in \mathbb{R}$.

¿Existe una solución en la que $x = 2$?

$$\begin{cases} x = -2t \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = -3(-1) = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Si existe. La solución es $x = 2$; $y = 3$; $z = -1$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula m para que AB no tenga inversa. **(1 punto)**

b) Estudia el rango de la matriz BA según los valores de m . **(1.5 puntos)**

a) Para que AB no tenga inversa el determinante debe ser nulo.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2 \\ 1+m & 1+2m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1+m & 2m \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+m & 2m \end{vmatrix} = 2m + 1 + m = 3m + 1$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow 3m + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{3}}$$

La matriz AB no tiene inversa cuando $m = -\frac{1}{3}$.

b) Calculamos la expresión de BA .

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+m & 1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & -m-m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & m-1 & 1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & -2m & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante.

$$|BA| = \begin{vmatrix} 2 & m-1 & 1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & -2m & -1 \end{vmatrix} = -4m + 2(m-1)^2 - 4m - 2m^2 + 2m + 2m - 2 + 8m =$$

$$= 2(m^2 + 1 - 2m) - 2m^2 + 4m - 2 = 2m^2 + 2 - 4m - 2m^2 + 4m - 2 = 0$$

El determinante de BA es nulo, independientemente del valor de m .

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 2ª nos queda un

menor con determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$.

El rango de BA es 2, independientemente del valor de m .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

- a) Halla el plano que contiene a r y es paralelo a s . **(1.5 puntos)**
 b) Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a s contiene a r . **(1 punto)**.

- a) El plano π que contiene a r y es paralelo a s tiene como vectores directores los vectores directores de la recta r y s . Y pasa por un punto cualquiera de la recta r .
 Hallamos primero un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ P_r(2, -1, 3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = -2z + 4 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2z - 4 - 2 = 0 \Rightarrow 2x + 2z - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + z - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 - z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 - 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, -2, 1) \\ Q_s(3, 4, 0) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1, -2, 1) \\ P_r(2, -1, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4 - y - 1 - 6z + 18 + 2z - 6 - 3y - 3 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 4y - 4z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y - z = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s es $\pi \equiv x - y - z = 0$.

- b) Un plano π' perpendicular a la recta s tiene como vector normal el vector director de la recta s .

$$s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, -2, 1) \\ Q_s(3, 4, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}_s = (-1, -2, 1) \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -x - 2y + z + D = 0}$$

Hallamos los puntos de corte de este plano y la recta r . Buscamos el número de soluciones, que indicarán si la recta está contenida o no en el plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow -2 - 3\lambda + 2 - 4\lambda + 3 + \lambda + D = 0 \Rightarrow -6\lambda = -D - 3 \Rightarrow$$

$$\pi' \equiv -x - 2y + z + D = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{D+3}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{D+3}{2} = \frac{D+7}{2} \\ y = -1 + \frac{D+3}{3} = \frac{D}{3} \\ z = 3 + \frac{D+3}{6} = \frac{D+21}{6} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{D+7}{2}, \frac{D}{3}, \frac{D+21}{6}\right)$$

El plano π' y la recta r solo coinciden en un punto P , por lo que dicho plano nunca contiene a la recta.

OTRA FORMA DE HACERLO

- b) Usando el vector director de la recta r y el vector normal del plano perpendicular a la recta s que es el vector director de la recta s .

Si los vectores de estas dos rectas son perpendiculares habrá un plano perpendicular a s que puede contener a la recta r . De no ser así no existe dicho plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = (3, 2, 1)(-1, -2, 1) = -3 - 4 + 1 = -6 \neq 0$$

Al ser el producto escalar no nulo las rectas no son perpendiculares y la situación planteada no es posible.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,2,3)$, $B(-2,4,-3)$ y $C(-10,1,0)$.

a) Halla el área del triángulo de vértices A, B y C. (1.25 puntos)

b) Halla el plano que equidista de A y B. (1.25 puntos)

a) El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

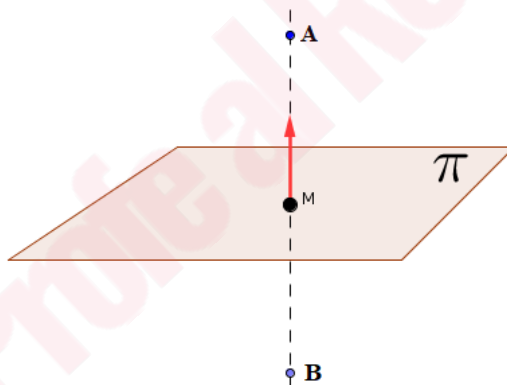
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-10, 1, 0) - (1, 2, 3) = (-11, -1, -3) \\ \overrightarrow{AB} = (-2, 4, -3) - (1, 2, 3) = (-3, 2, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -11 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 6i + 9j - 22k - 3k - 66j + 6i = 12i - 57j - 25k = (12, -57, -25)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{12^2 + (-57)^2 + (-25)^2}}{2} = \boxed{\frac{7\sqrt{82}}{2} \approx 31.69 \text{ u}^2}$$

El área del triángulo de vértices A, B y C vale $\frac{7\sqrt{82}}{2} \approx 31.69 \text{ u}^2$

c) Buscamos la ecuación del plano π del dibujo.



Hallamos el punto M que pertenecerá al plano π y que es el punto medio del segmento AB.

$$M = \frac{(-2, 4, -3) + (1, 2, 3)}{2} = \left(-\frac{1}{2}, 3, 0\right)$$

El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB}$. Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-3, 2, -6) \\ M = \left(-\frac{1}{2}, 3, 0\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -3x + 2y - 6z + D = 0 \\ M = \left(-\frac{1}{2}, 3, 0\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -6 - \frac{3}{2} = -\frac{15}{2} \Rightarrow \pi \equiv -3x + 2y - 6z - \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -6x + 4y - 12z - 15 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi \equiv -6x + 4y - 12z - 15 = 0$.