

Problema 1. A. Una empresa fabrica dos modelos de frigoríficos, A y B. Para su fabricación la empresa necesita un departamento de montaje y un departamento de pintura. Cada departamento dispone semanalmente de 100 horas. Un frigorífico del modelo A necesita 3 horas en el departamento de montaje y 1 hora en el de pintura, mientras que uno del modelo B necesita 1 hora y 2 horas, respectivamente, en cada departamento. Se pide:

- a) ¿Qué cantidad de cada modelo debe producir la empresa para maximizar sus ganancias, si el beneficio por cada frigorífico del modelo A es de 500 euros y por cada frigorífico del modelo B es de 400 euros? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicha ganancia máxima? (0,5 puntos)

Solución:

Llamando: x = unidades fabricadas del modelo A
 y = unidades fabricadas del modelo B

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº unidades	Montaje	Pintura	Beneficio
A	x	3 h./unidad	1 h./unidad	500€/unidad
B	y	1 h./unidad	2 h./unidad	400€/unidad
Disponibilidad		100 h.	100 h.	

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

Por el montaje de los frigoríficos $\rightarrow 3x + y \leq 100$.

Por la pintura de los frigoríficos $\rightarrow x + 2y \leq 100$.

Como las variables x e y representan número de unidades deben ser números naturales.

El beneficio viene dada por la función: $z = 500x + 400y$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 500x + 400y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $3x + y \leq 100$

$$3x + y = 100$$

x	y
0	100
100/3	0
33	1

¿(0,0) cumple?

$$3 \cdot 0 + 0 \leq 100 \quad \text{Sí}$$

(b) $x + 2y \leq 100$

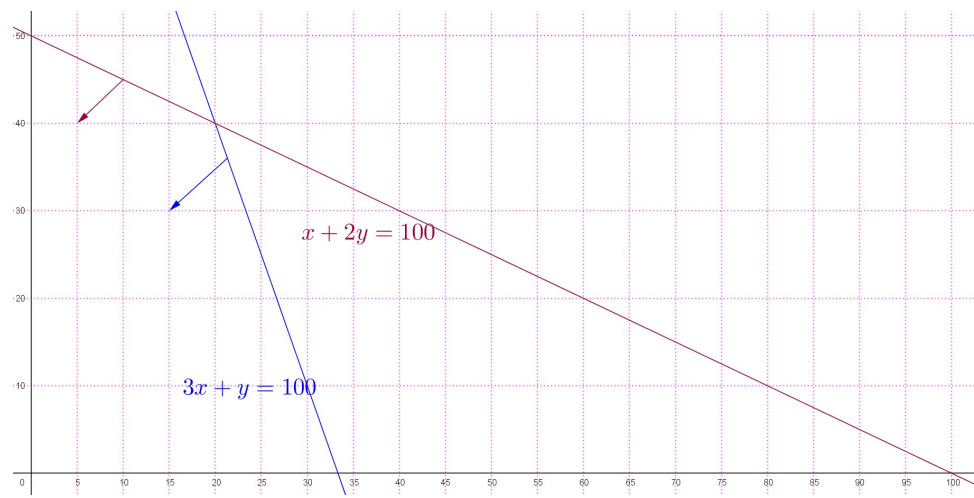
$$x + 2y = 100$$

x	y
0	50
100	0

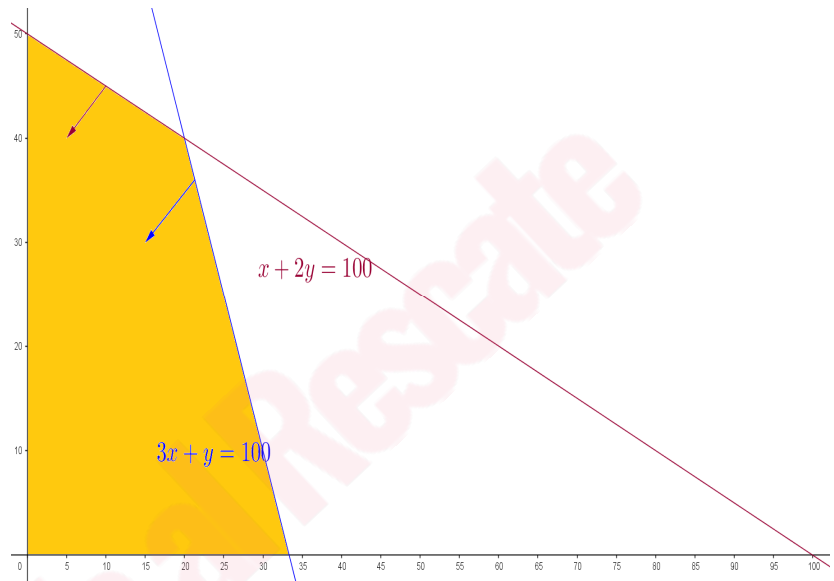
¿(0,0) cumple?

$$0 + 2 \cdot 0 \leq 100 \quad \text{Sí}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son $A(0, 0)$, $B(0, 50)$ y $D(100/3, 0)$. Pero este último no es de la región factible ($100/3 \notin \mathbb{N}$), tendremos que tomar el $(33, 1)$ y esperar que el máximo se alcance en el punto de corte de las dos rectas.

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x + y = 100 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \quad I^a \quad \begin{cases} 3x + y = 100 \\ -3x - 6y = -300 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } -5y = -200 \quad y = \frac{-200}{-5} = 40$$

Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación: $x + 2 \cdot 40 = 100$; $x + 80 = 100$; $x = 100 - 80$
 $x = 20$. Luego $C(20, 40)$

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 500x + 400y$	
$0, 0$	$500 \cdot 0 + 400 \cdot 0 = 0$	
$0, 50$	$500 \cdot 0 + 400 \cdot 50 = 20000$	
$20, 40$	$500 \cdot 20 + 400 \cdot 40 = 26000$	máximo
$33, 1$	$500 \cdot 33 + 400 \cdot 1 = 16900$	

El máximo se alcanza en el punto $(20, 40)$

Por tanto,

- Para maximizar sus ganancias la empresa debe producir 20 unidades del frigorífico A y 40 del B.
- Con esta producción la ganancia máxima será de 26000€.

Problema 1. B. Una papelería pone a la venta 50 bolígrafos repartidos entre tres tipos: azules, rojos y negros. El número de bolígrafos azules es 11 veces la suma de la cantidad de bolígrafos negros más la mitad de los bolígrafos rojos. Vende por 3,75 euros cada bolígrafo azul, por 2,25 cada bolígrafo rojo y por 1,5 cada bolígrafo negro. Sabiendo que le han robado 2 bolígrafos negros y 4 azules y que ha recaudado vendiendo el resto de los bolígrafos 159 euros, ¿cuántos bolígrafos rojos, azules y negros tenía la tienda inicialmente?

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Solución:

Llamando: x = número de bolígrafos rojos iniciales
 y = número de bolígrafos azules iniciales
 z = número de bolígrafos negros iniciales

Del enunciado del problema obtenemos:

“pone a la venta 50 bolígrafos repartidos en tres tipos”, $x + y + z = 50$

“El número de bolígrafos azules es 11 veces la suma de los negros más la mitad de los rojos”, $y = 11\left(z + \frac{x}{2}\right)$

$$y = 11z + \frac{11x}{2} \rightarrow 2y = 22z + 11x \rightarrow 11x - 2y + 22z = 0$$

“Vende azul por 3,75€, rojo por 2,25€ y negro por 1,50€. Roban 2 negros y 4 azules, ha recaudado 159€”,

$$2,25x + 3,75(y - 4) + 1,50(z - 2) = 159; \quad 2,25x + 3,75y - 15 + 1,5z - 3 = 159;$$

$$2,25x + 3,75y + 1,5z = 159 + 15 + 3; \quad 2,25x + 3,75y + 1,5z = 177; \quad \text{para quitar los decimales multiplicamos por 4: } 9x + 15y + 6z = 708; \quad \text{simplificando entre 3: } 3x + 5y + 2z = 236$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 11x - 2y + 22z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 236 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & -2 & 22 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 236 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 1 \cdot F_1 \\ F_3 - 3 \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -13 & 11 & -550 \\ 0 & 2 & -1 & 86 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + 11 \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 9 & 0 & 396 \\ 0 & 2 & -1 & 86 \end{array}\right)$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 9y = 396 \rightarrow y = \frac{-396}{9} = 44$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow 2y - z = 86 \rightarrow 2 \cdot 44 - z = 86 \rightarrow 88 - 86 = z \rightarrow z = 2$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x + y + z = 50 \rightarrow x + 44 + 2 = 50 \rightarrow x + 46 = 50 \rightarrow x = 50 - 46 \rightarrow x = 4$$

Solución: inicialmente en la tienda tenía 4 bolígrafos rojos, 44 azules y 2 negros.

Problema 2.A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)
- Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimo locales que tiene esta función en el intervalo $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. (4 puntos)
- Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX . (2 puntos)

Solución:

a) ¿Valor de a para que $f(x)$ sea continua?

Para $x < -1$ $f(x) = x^3 + a x^2 + 24x$ es, independientemente del valor de a , un polinomio luego es continua.

Para $x > -1$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ es un polinomio luego es continua.

El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = -1$.

Continuidad en $x = -1$,

$$a) f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^3 + a x^2 + 24x) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = a - 25$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [(x-1)^2 + 3] = (-1-1)^2 + 3 = 7$$

$$\text{Para que exista el límite } a - 25 = 7 \rightarrow a = 7 + 25 = 32$$

$$c) \text{ Para } 32 = 2 \quad f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Solución: para que $f(x)$ sea continua debe ser $a = 32$.

b) Para $a = 9$, máximos y mínimos locales de $f(x)$ en $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (-4.5, -1.5)$.

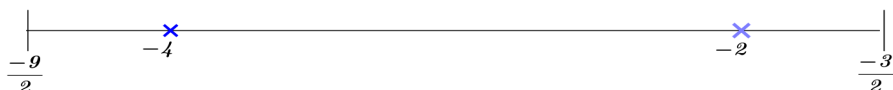
$$\text{Como } (-4.5, -1.5) \subset \{x \leq -1\} \rightarrow f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

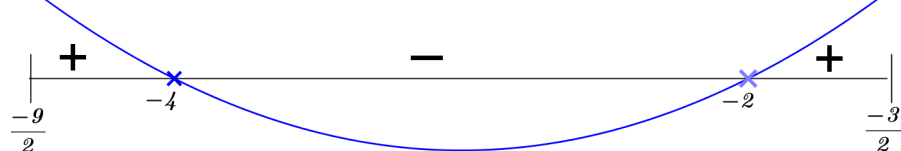
estudiemos el signo de $f'(x)$

$$3x^2 + 18x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm 6}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-18+6}{6} = -2 \\ x_2 = \frac{-18-6}{6} = -4 \end{cases}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en:



$f'(x)$ es, gráficamente, un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -4 y -2 , luego,



En $x = -4$ hay un máximo local
y
en $x = -2$ hay un mínimo local

Para $x = -4 \rightarrow f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -16$

Para $x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -20$

Solución: para $a = 9$ los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ son:

$(-4, -16)$ máximo local y $(-2, -20)$ mínimo local.

c) Si $a = 0$ ¿área de la región delimitada por $f(x)$, $x=2$, $x=3$ y eje OX ?

$$\text{Si } a = 0 \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Entre $x = 2$ y $x = 3$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ y, además, como $f(x)$ es algo al cuadrado más tres: $f(x) > 0$. Por tanto el área pedida la obtenemos mediante el siguiente cálculo:

$$A = \int_2^3 [(x-1)^2 + 3] dx$$

Simplifiquemos el integrando: $(x-1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 1 + 3 = x^2 - 2x + 4$

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 [x^2 - 2x + 4] dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^3 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 + 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 4 \cdot 2 \right) = \\ &= (9 - 9 + 12) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 8 \right) = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Otra forma de resolverlo sería

$$A = \int_2^3 [(x-1)^2 + 3] dx$$

Cálculo auxiliar: $\int (x-1)^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de variable} \\ t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$

$$A = \int_2^3 [(x-1)^2 + 3] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x \right]_2^3 = \left(\frac{(3-1)^3}{3} + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{(2-1)^3}{3} + 3 \cdot 2 \right) = \frac{8}{3} + 9 - \left(\frac{1}{3} + 6 \right) = \frac{16}{3}$$

Por tanto, el área de la región pedida es $\frac{16}{3}$ u.a.

Problema 2. B. El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso x (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{50x}{1+x^2} + 50$$

- Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo. (1,5 puntos)
- ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50 %? (1 punto)
- Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65 % a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse? (1 punto)

Solución:

$$f(x) = \frac{50x}{1+x^2} + 50 \quad x \text{ medido en años (por tanto } x \geq 0); \quad f(x) \text{ rendimiento en \%}$$

- a) ¿ x ? / $f(x)$ sea máximo. Sabemos que $\text{Dom } f(x) = [0, +\infty)$.

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{50(1+x^2) - 50x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{50 + 50x^2 - 100x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{50 - 50x^2}{(1+x^2)^2}$$

Como el denominador es una expresión al cuadrado, siempre es positivo; el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador

$$50 - 50x^2 = 0; \quad 50 = 50x^2; \quad x^2 = \frac{50}{50} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Como $\text{Dom } f(x) = [0, +\infty)$ debemos estudiar el signo de $f'(x)$ a ambos lados de $x = 1$,

x	$50 - 50x^2$	
0'5	$50 - 50 \cdot 0'5^2 = 37'5$	+
1'5	$50 - 50 \cdot 1'5^2 = -62'5$	-

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en $x = 1$ hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función $f(x)$ a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{50 \cdot 1}{1+1^2} + 50 = 75$$

Por tanto, el rendimiento máximo se alcanza al cabo de 1 año. Y ese rendimiento máximo es del 75%.

- b) ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50 %? Buscamos $x / f(x) < 50$

$$\frac{50x}{1+x^2} + 50 < 50 \rightarrow \frac{50x}{1+x^2} < 0$$

$$\text{Como } x \geq 0 \rightarrow 50x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1+x^2 > 0, \text{ por tanto } \frac{50x}{1+x^2} \geq 0$$

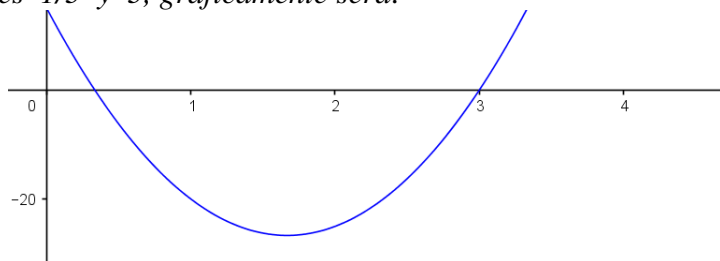
Nunca se alcanza un rendimiento inferior al 50%.

c) Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65 % a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse? Buscamos $x/f(x) < 65$ [a partir del 1^{er} año ($x > 1$)]

$$\frac{50x}{1+x^2} + 50 < 65 \rightarrow \frac{50x}{1+x^2} < 15 \rightarrow 50x < 15 + 15x^2 \rightarrow 15x^2 - 50x + 15 > 0$$

$$15x^2 - 50x + 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 15}}{2 \cdot 15} = \frac{50 \pm 40}{30} = \begin{cases} x_1 = \frac{50+40}{30} = 3 \\ x_2 = \frac{50-40}{30} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La inecuación a resolver [$15x^2 - 50x + 15 > 0$] es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces $1/3$ y 3 , gráficamente será:



Como x debe ser mayor que 1, la solución de la inecuación es $x > 3$.

A partir del tercer año el rendimiento es inferior al 65%

Por tanto, **el motor debe reemplazarse al tercer año.**

Tu Profeta al Rescate

Problema 3. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

- Calcula la probabilidad de que el estudiante esté en ESO o haya escogido música. (1 punto)
- Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (1 punto)
- ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? (1 punto)

Solución:

Construyamos la tabla de distribución de los estudiantes por nivel y extraescolar (cada alumno escoge sólo una extraescolar).

El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol.

El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música.

	Fútbol	Baloncesto	Música	total
ESO	230	60		310
Bachillerato			8	
total	300			400

Completamos la tabla con las restas y sumas correspondientes,

$310 - 230 - 60 = 20$; $300 - 230 = 70$; $20 + 8 = 28$; $400 - 300 - 28 = 72$; $72 - 60 = 12$; $400 - 310 = 90$.

	Fútbol	Baloncesto	Música	total
ESO	230	60	20	310
Bachillerato	70	12	8	90
total	300	72	28	400

Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

- Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” o “el estudiante ha escogido música”

Sucesos: ESO = “el estudiante está en ESO” y MUS = “el estudiante ha escogido música”

La probabilidad pedida es: $P(ESO \cup MUS)$

$$P(ESO \cup MUS) = P(ESO) + P(MUS) - P(ESO \cap MUS) = \frac{310}{400} + \frac{28}{400} - \frac{20}{400} = \frac{159}{200} = 0,795$$

La probabilidad pedida es 0,795.

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?

Suceso: $DEP =$ “el estudiante ha seleccionado extraescolar deportiva”

La probabilidad pedida es: $P(ESO/DEP)$

$$P(ESO/DEP) = \frac{P(ESO \cap DEP)}{P(DEP)} = \frac{\frac{230+60}{400}}{\frac{230+60}{400} + \frac{70+12}{400}} = \frac{\frac{290}{400}}{\frac{372}{400}} = \frac{290}{372} = \frac{145}{186} \cong 0'7796$$

La probabilidad pedida es 0'7796.

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”?

Sucesos: $BAC =$ “el estudiante está en Bachillerato” y $NBAL =$ “el estudiante no ha escogido baloncesto”

Debemos comprobar si $P(BAC \cap NBAL) = P(BAC) \cdot P(NBAL)$

$$\left. \begin{aligned} P(BAC \cap NBAL) &= \frac{70+8}{400} = \frac{39}{200} = 0'195 \\ P(BAC) &= \frac{90}{400} \\ P(NBAL) &= \frac{300+28}{400} = \frac{328}{400} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{¿}0'195 = \frac{90}{400} \cdot \frac{328}{400}\text{?}; \quad \text{¿}0'195 = \frac{369}{2000}\text{?}; \quad \text{¿}0'195 = 0'1845\text{?} \text{ No} \end{aligned}$$

Por tanto, los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto” no son independientes.