

Convocatoria extraordinaria de 2024

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

La recta tangente en $x = \pi/2$ es $y = 1$, por tanto su pendiente es cero. Como

$$f(\pi/2) = a + c, \quad f'(x) = -b \sin x + c \cos x,$$

se obtiene $a + c = 1$ y $-b = 0$. Además, la recta $y = x - 1$ corta la gráfica en $x = 0$, así que $f(0) = a + b = -1$. Resolviendo:

$$\boxed{a = -1, \quad b = 0, \quad c = 2}.$$

Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R}$. Derivamos el producto:

$$f'(x) = e^{-x^2} \left(1 - 2x \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) = e^{-x^2} (-2x^2 + x + 1).$$

El factor exponencial es positivo y el polinomio se anula en $x = -1/2$ y $x = 1$. Su signo es negativo fuera de esos puntos y positivo entre ellos. Por ello f decrece en $(-\infty, -1/2)$, crece en $(-1/2, 1)$ y decrece en $(1, \infty)$. Los extremos son

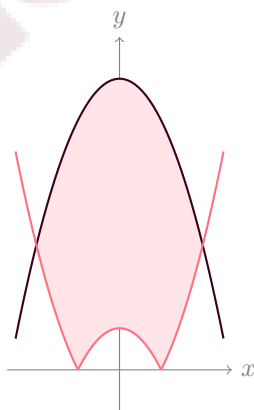
$$f(-1/2) = -e^{-1/4}, \quad f(1) = \frac{1}{2e}.$$

Como $f(x) \rightarrow 0$ en ambos infinitos, el primero es el mínimo absoluto y el segundo el máximo absoluto.

Ejercicio 3

Para $|x| \geq 1$, $g(x) = x^2 - 1$; para $|x| < 1$, $g(x) = 1 - x^2$. En el primer caso, la igualdad con $f = -x^2 + 7$ da $x = \pm 2$, con ordenada 3. En el segundo no hay intersecciones, pues $-x^2 + 7 = 1 - x^2$ exigiría $7 = 1$. Entre -1 y 1 , la diferencia $f - g$ vale 6; en los dos intervalos laterales acotados entre las intersecciones y $x = \pm 1$, vale $8 - 2x^2$. Así, el área es

$$S = 2 \int_1^2 (8 - 2x^2) dx + \int_{-1}^1 6 dx = \frac{20}{3} + 12 = \boxed{\frac{56}{3}}.$$



Ejercicio 4

Integramos por partes dos veces; una primitiva de $e^x \cos x$ es $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$. Por tanto,

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \left[\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{e^{\pi/2} - 1}{2}}.$$

Ejercicio 5

Sea $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $A = \text{diag}(-1, 1)$. La igualdad $XA = -AX^t$ da $p = s = 0$ y $q = r$. Así, $X = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$. La condición $X^2 = I$ equivale a $q^2 = 1$, por lo que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para el apartado b), las matrices que conmutan con A son diagonales: $Y = \text{diag}(u, v)$. La traza nula exige $v = -u$ y el determinante -1 impone $u^2 = 1$. Las soluciones son

$$Y = \text{diag}(1, -1) \quad \text{o} \quad Y = \text{diag}(-1, 1).$$

Ejercicio 6

Sean p_A, p_B, p_C los precios por unidad. Los pedidos proporcionan

$$20p_A + 30p_B + 15p_C = 2200, \quad 15p_A + 10p_B + 10p_C = 1250.$$

El pedido de 25, 10 y 16 unidades costará $25p_A + 10p_B + 16p_C$. Esta combinación es $-\frac{2}{5}$ veces el primer pedido más $\frac{11}{5}$ veces el segundo; por ello el precio es $-\frac{2}{5}(2200) + \frac{11}{5}(1250) = 1870 \text{ €}$. Si además $p_C = \frac{2}{5}p_A$, al resolver el sistema resulta $p_A = 50$, $p_B = 30$ y $p_C = 20$. Por tanto, los precios son **50 €, 30 € y 20 €** para A, B y C, respectivamente.

Ejercicio 7

Sustituyendo la recta $r = (1+2\lambda, \lambda, 1)$ en $x-2y+z-2=0$ se obtiene 0 para todo λ ; luego r está contenida en π . Su director es $d = (2, 1, 0)$. Una recta contenida en π y perpendicular a r debe tener un director perpendicular tanto a d como al normal $n = (1, -2, 1)$ del plano. El producto vectorial $n \times d = (-1, 2, 5)$ cumple ambas condiciones. Como $P = (2, -1, -2)$ pertenece a π , la recta pedida es

$$(x, y, z) = (2, -1, -2) + t(-1, 2, 5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 8

Los puntos del plano OXZ tienen forma $C = (x, 0, z)$. La longitud del lado AB cumple $AB^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$. Para que ABC sea equilátero, también

$$(x-4)^2 + z^2 = 20, \quad x^2 + 4 + z^2 = 20.$$

Al restar las ecuaciones se obtiene $x = 3/2$ y, sustituyendo, $z^2 = 55/4$. Los puntos son

$$\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right).$$