

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

Sea x la semibase del rectángulo y y su altura. Al estar inscrito en una semicircunferencia de radio 6, sus vértices superiores cumplen $x^2 + y^2 = 36$, mientras que el área es $A = 2xy$. Para un producto máximo con suma de cuadrados fija, $x = y$; también se obtiene derivando $A(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$. Así,

$$x = y = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

La base mide $2x$ y la altura y , por lo que las dimensiones son $\boxed{6\sqrt{2} \text{ cm} \times 3\sqrt{2} \text{ cm}}$.

Ejercicio 2

Usamos los desarrollos de Taylor hasta el primer término no nulo:

$$\sin x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad e^x - \cos(2x) = x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^2).$$

Al restar también el término x del denominador, este queda $(a + 5/2)x^2 + o(x^2)$. Por tanto, el límite es $\frac{1/2}{a+5/2} = \frac{1}{2a+5}$. Igualando a $-1/7$,

$$2a + 5 = -7 \implies \boxed{a = -6}.$$

Ejercicio 3

Como $[6, 12]$ no contiene ceros de $9 - x^2$, la integral está definida. Una primitiva es

$$\int \frac{dx}{9 - x^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{3-x} \right| + C.$$

Aplicando Barrow,

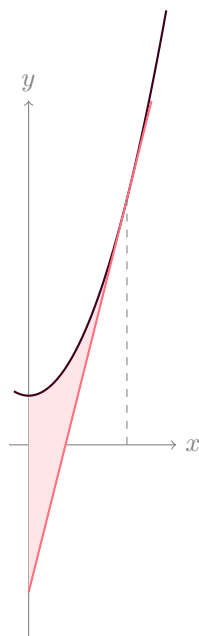
$$\int_6^{12} \frac{dx}{9 - x^2} = \frac{1}{6} \ln \frac{5}{3} - \frac{1}{6} \ln 3 = \boxed{\frac{1}{6} \ln \frac{5}{9}}.$$

El resultado es negativo porque el integrando es negativo en todo el intervalo $[6, 12]$.

Ejercicio 4

La pendiente de la recta dada es 4. Como $f'(x) = 2x$, una tangente paralela a esa recta debe tocar la parábola en $x = 2$, donde $f(2) = 5$. La ecuación tangente resulta precisamente $y = 4x - 3$. La recta y la parábola se encuentran cuando $x^2 + 1 = 4x - 3$, es decir, $(x - 2)^2 = 0$; además, el recinto está limitado por $x = 0$. En $0 \leq x \leq 2$ la parábola queda por encima de la recta y la diferencia es $(x - 2)^2$. Por ello,

$$S = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}}.$$



Ejercicio 5

Sean x, y, z los litros de L_1, L_2, L_3 . Deben sumar un litro y aportar cada uno 100 mg:

$$x + y + z = 1, \quad 120x + 100y + 60z = 100, \quad 90x + 90y + 180z = 100.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = 2/9, y = 2/3, z = 1/9$, todos no negativos. Es posible preparar la mezcla con $\boxed{2/9 \text{ L de } L_1, 2/3 \text{ L de } L_2, 1/9 \text{ L de } L_3}$.

Ejercicio 6

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det A = 12m^2 - 12m - 1.$$

La matriz tiene inversa cuando este determinante no se anula, es decir,

$$m \neq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad m \neq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para $m = 1$, $\det A = -1$, así que $AX = B^t$ tiene solución única. Al multiplicar por A^{-1} a la izquierda resulta

$$X = A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 37 \\ 2 & 3 & 9 \\ 8 & 20 & 53 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7

Los puntos que dividen AB en cuatro partes iguales se obtienen desde A avanzando un cuarto, dos cuartos y tres cuartos del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, -4).$$

Así, los tres puntos son

$$\boxed{(5/4, -3/2, 2), \quad (3/2, -1, 1), \quad (7/4, -1/2, 0)}.$$

El punto medio es $M = (3/2, -1, 1)$. Un plano perpendicular a AB tiene como normal a $\overrightarrow{AB}$; al pasar por M su ecuación es

$$(x - 3/2) + 2(y + 1) - 4(z - 1) = 0,$$

o, equivalentemente, $\boxed{2x + 4y - 8z + 9 = 0}$.

Ejercicio 8

Parametrizamos r como $(1+t, 2t, 2t-1)$. Al sustituir en $x+y+z=0$ se obtiene $5t=0$, luego $Q = (1, 0, -1)$. Un plano paralelo a π tiene forma $x+y+z=c$. Su intersección con r corresponde a $t=c/5$. La distancia entre Q y ese punto es la longitud del vector director $(1, 2, 2)$ por $|t|$, o sea $3|t|$. Para que sea 2, $|t| = 2/3$ y $c = \pm 10/3$. Por tanto, los planos buscados son

$$\boxed{x + y + z = \frac{10}{3} \quad \text{o} \quad x + y + z = -\frac{10}{3}}.$$