

Modelo 4 de 2008

Se determinan los puntos de corte antes de calcular las áreas y se comparan rangos cuando procede.

Opción A - Ejercicio 1

Escribimos $f(x) = (x+1)e^{-x}$; su dominio es $\mathbb{R}$. Entonces

$$f'(x) = -xe^{-x}, \quad f''(x) = (x-1)e^{-x}.$$

La segunda derivada cambia de signo en $x = 1$, de modo que el punto de inflexión es $(1, 2/e)$. Su pendiente es $-1/e$, así que

$$y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x - 1).$$

Opción A - Ejercicio 2

Al igualar las funciones,

$$x^3 - 4x = 3x - 6 \iff (x+3)(x-1)(x-2) = 0,$$

así que los cortes tienen abscisas $-3, 1, 2$. En $[-3, 1]$ la cúbica queda encima de la recta y en $[1, 2]$ debajo. Con $F(x) = x^4/4 - 7x^2/2 + 6x$:

$$\mathcal{A} = \int_{-3}^1 (f - g) dx - \int_1^2 (f - g) dx = 32 + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{131}{4}}.$$

Opción A - Ejercicio 3

De las dos primeras ecuaciones, $x = 1 - y$ y $z = -ky$. Al sustituir en la tercera se obtiene

$$1 + k(1 - k)y = k + 1.$$

Si $k = 0$, la igualdad se cumple para todo y , así que el sistema es compatible indeterminado. Si $k = 1$, queda $1 = 2$, por lo que es incompatible. Para $k \neq 0, 1$, se determina un único valor de y , así que es compatible determinado. Si además $z = 2$, las ecuaciones dan $k = 2$, $y = -1$, $x = 2$:

$$k = 2, \quad (x, y, z) = (2, -1, 2).$$

Opción A - Ejercicio 4

Parametrizamos $r = (0, t, 3 - 3t)$ y $s = (u, 0, 2u - 3)$. Se cortan en $P = (0, 0, 3)$. Sus directores son $(0, 1, -3)$ y $(1, 0, 2)$; su producto vectorial $(2, -3, -1)$ es normal al plano que contienen. Por ello,

$$2x - 3y - z - 3 = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

La continuidad en 2, la igualdad de derivadas laterales y $f(0) = f(4)$ dan

$$4 + 2a + b = 2c + 1, \quad 4 + a = c, \quad b = 4c + 1.$$

Al resolver se obtiene $a = -3, b = 5, c = 1$. En la primera rama $f'(x) = 2x - 3$ y en la segunda $f'(x) = 1$; la derivada solo se anula cuando

$$x = \frac{3}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos por partes con $u = \ln(x+1)$ y $dv = x dx$:

$$\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx.$$

Como $x^2/(x+1) = x - 1 + 1/(x+1)$,

$$\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La tercera fila de coeficientes es la suma de las dos primeras. En consecuencia, la condición de compatibilidad es

$$m^2 = 2 + m \iff (m - 2)(m + 1) = 0.$$

Para $m = -1$ o $m = 2$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, así que ambos sistemas son compatibles indeterminados. Para cualquier otro m , la ampliada tiene rango 3 y el sistema es incompatible. Tomando $z = t$, la reducción de las ecuaciones da

$$m = -1: \quad (x, y, z) = \left(-\frac{4}{5} - \frac{4}{5}t, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}t, t \right),$$

$$m = 2: \quad (x, y, z) = \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{5}t, \frac{6}{5} + \frac{3}{5}t, t \right).$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r cumple $x = y = 1$. Su punto de corte con $\pi_1: x + y + z = 0$ es $P = (1, 1, -2)$. Un vector director de una recta contenida en π_1 y paralela a $\pi_2: y + z = 0$ debe ser perpendicular a los normales $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 1)$; podemos tomar $(0, 1, -1)$. La recta pedida es

$$\boxed{x = 1, \quad y = 1 + t, \quad z = -2 - t, \quad t \in \mathbb{R}}.$$