

Modelo 2 de 2007

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

Sean x e y los números positivos. Como $x + y = 10$, podemos escribir $y = 10 - x$, con $0 < x < 10$. El producto de sus cuadrados es $P(x) = x^2(10 - x)^2 = [x(10 - x)]^2$. Al ser no negativo, se maximiza donde se maximiza $x(10 - x)$:

$$q(x) = x(10 - x), \quad q'(x) = 10 - 2x = 0 \implies x = 5.$$

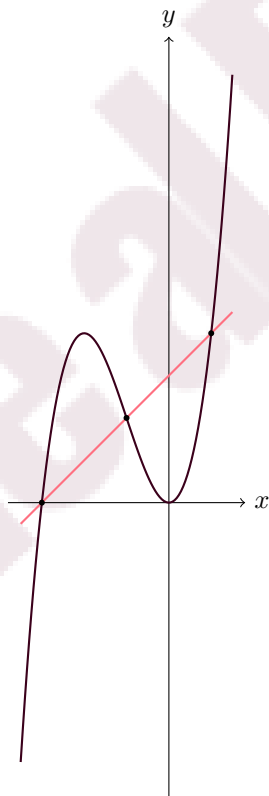
Entonces $y = 5$, y el producto máximo es $5^2 \cdot 5^2 = \boxed{625}$.

Opción A · Ejercicio 2

Los puntos de corte satisfacen $x^3 + 3x^2 = x + 3$, es decir,

$$f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Las abscisas son $-3, -1, 1$. El signo de $f - g$ muestra que f queda por encima en $[-3, -1]$ y por debajo en $[-1, 1]$. El siguiente esbozo muestra ambos cortes y los dos recintos:



Una primitiva de $f - g$ es

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x.$$

Por tanto,

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (f - g) dx = F(-1) - F(-3) = 4,$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 (g - f) dx = F(-1) - F(1) = 4.$$

Cada recinto tiene área $\boxed{4}$ unidades cuadradas.

Opción A · Ejercicio 3

a) Calculamos primero A^2 y después restamos $2A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & \lambda^2-1 \end{pmatrix}, \quad B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz B es invertible cuando su determinante no es cero:

$$\det B = -\lambda^2 + 2\lambda + 3 = (3-\lambda)(\lambda+1).$$

Así, B tiene inversa para $\lambda \neq 3, -1$.

c) Para $\lambda = 1$, $B = -2I$, luego $B^{-1} = -\frac{1}{2}I$.

Opción A · Ejercicio 4

a) Para no cortar a ninguno de los planos, la recta debe ser paralela a ambos. Un vector director perpendicular a los normales $(1, -1, 1)$ y $(1, 1, -1)$ es su producto vectorial, proporcional a $(0, 1, 1)$. La recta por $A(1, 2, 3)$ queda

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

El punto A no pertenece a ninguno de los planos, por lo que la recta no está contenida en ellos.

b) La intersección de los planos cumple $x = 1$, $y - z = 1$, así que sus puntos son $(1, 1+t, t)$. La condición de equidistancia a A y B se obtiene igualando distancias al cuadrado:

$$|X - A|^2 = |X - B|^2 \iff X \cdot (B - A) = \frac{|B|^2 - |A|^2}{2}.$$

Con $B - A = (1, -1, -3)$ resulta $x - y - 3z = -\frac{9}{2}$. Al sustituir el punto de la recta, $-4t = -\frac{9}{2}$, de donde $t = \frac{9}{8}$.

El punto pedido es $(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8})$.

Opción B · Ejercicio 1

Integramos la derivada para recuperar la familia de funciones:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C.$$

Como $f'(x) = (x+3)(x-2)$, en $x = -3$ hay un máximo y en $x = 2$ un mínimo. Sus valores son $f(-3) = \frac{27}{2} + C$ y $f(2) = -\frac{22}{3} + C$. La condición dada impone

$$\frac{27}{2} + C = 3 \left(-\frac{22}{3} + C \right) \implies C = \frac{71}{4}.$$

Por tanto, $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{71}{4}$.

Opción B · Ejercicio 2

La tangente en $x = 0$ tiene pendiente $f'(0) = 1$ y pasa por $(0, 0)$, por lo que es $y = x$. En $[0, 1]$ la recta queda por encima de $\ln(1+x)$; el área es

$$A = \int_0^1 (x - \ln(1+x)) dx.$$

Por partes, $\int \ln(1+x) dx = (1+x) \ln(1+x) - (1+x) + C$. Así,

$$A = \frac{1}{2} - (2 \ln 2 - 1) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Opción B · Ejercicio 3

Restando la primera y la tercera ecuación, y la segunda y la tercera, obtenemos

$$(a-1)x = 2-a, \quad -(a+1)y = -(a+1).$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $1 - a^2$, así que solo hay que revisar $a = 1$ y $a = -1$. Para $a = 1$, la primera y tercera ecuaciones tienen el mismo miembro izquierdo pero distintos términos independientes (4 y 3): el sistema es incompatible. Para $a = -1$, las dos últimas ecuaciones coinciden y la primera determina $x = -\frac{3}{2}$; además $y + z = \frac{5}{2}$. Por tanto, es compatible indeterminado y sus soluciones son

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}, t, \frac{5}{2} - t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $a = -2$, al restar la tercera ecuación de las dos primeras se obtiene $-3x = 3$ y $y = 1$. La tercera da $z = 0$, así que $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$.

Opción B · Ejercicio 4

a) La dependencia lineal se determina anulando el determinante de los tres vectores:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2m \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix} = -(m-1)^2.$$

Por tanto, son dependientes únicamente para $m = 1$.

b) Con $m = 1$, los vectores son $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, -1)$ y $w = (1, 2, 0)$. Se comprueba componente a componente que $u + v = w$, luego $w = u + v$.