

OPCIÓN A**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 1.** Resuelve las siguientes cuestiones:

- a) Calcula las matrices X e Y sabiendo que $X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.
- b) Obtén la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- c) Obtén la matriz X tal que $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Por reducción, sumando ambas ecuaciones,

$$3X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el valor de la matriz X en la primera ecuación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0, \text{ por lo que existe } A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) Buscamos una matriz X / $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

Como conocemos A^{-1} , multiplicando la expresión anterior por la derecha por A^{-1}

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}, \text{ como } A \cdot A^{-1} = I$$

$$X \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}, \text{ como } X \cdot I = X$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{3}{2} \\ 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) & 8 \cdot (-1) + 6 \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}$, se pide

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Cálculo del dominio,

Obtenemos los valores de x para los que el denominador es cero,

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Luego $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow y = \frac{-4}{3} \rightarrow \left(0, \frac{-4}{3}\right)$$

$$y=0 \rightarrow \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow (2, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$ y $(2, 0)$

b) Asíntotas verticales

Según el estudio del dominio, las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 3$

Veamos si $x = 1$ es a.v.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1^2 + 4 \cdot 1 - 4}{1^2 - 4 \cdot 1 + 3} = \frac{-1 + 4 - 4}{1 - 4 + 3} = \frac{-1}{0} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ es a.v.}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{x=0.9}{=} \frac{-0.9^2 + 4 \cdot 0.9 - 4}{0.9^2 - 4 \cdot 0.9 + 3} = \frac{-}{+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{x=1.1}{=} \frac{-1.1^2 + 4 \cdot 1.1 - 4}{1.1^2 - 4 \cdot 1.1 + 3} = \frac{-}{-} = +\infty$$



Veamos si $x = 3$ es a.v.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-3^2 + 4 \cdot 3 - 4}{3^2 - 4 \cdot 3 + 3} = \frac{-9 + 12 - 4}{9 - 12 + 3} = \frac{-1}{0} = \infty \rightarrow x = 3 \text{ es a.v.}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} &= \frac{-2^2 + 4 \cdot 2 - 4}{2^2 - 4 \cdot 2 + 3} = \frac{-}{-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} &= \frac{-3^2 + 4 \cdot 3 - 4}{3^2 - 4 \cdot 3 + 3} = \frac{-}{+} = -\infty\end{aligned}$$

$x = 3$

Asíntotas horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = -1$$

Por lo tanto $y = -1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$x = -1000 \rightarrow \frac{-(-1000)^2 + 4(-1000) - 4}{(-1000)^2 - 4(-1000) + 3} = \frac{-1004004}{1004003} = -1.000...$$

$$x = 1000 \rightarrow \frac{-1000^2 + 4 \cdot 1000 - 4}{1000^2 - 4 \cdot 1000 + 3} = \frac{-996004}{996003} = -1.000...$$

Luego $y = -1$

Para resolver los apartados c) y d) calculamos la derivada de la función,

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x + 4)(x^2 - 4x + 3) - (-x^2 + 4x - 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

x^2	$-4x$	$+3$	
$\otimes$	$-2x$	$+4$	$-x^2$
$4x^2$	$-16x$	$+12$	$+4x$
$-2x^3$	$+8x^2$	$-6x$	-4
$-2x^3$	$+12x^2$	$-22x$	$2x$
$2x^3$	$-12x^2$	$+24x$	-4
	$2x$	-4	

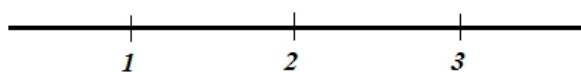
c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$. Como es un cociente de polinomios, buscamos las raíces del numerador y del denominador,

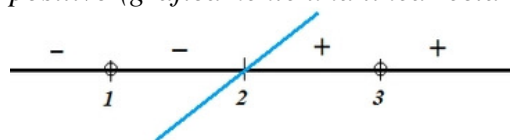
$$2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 4/2 \rightarrow x = 2$$

$$(x^2 - 4x + 3)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (\text{visto en apartado a)}) \quad x = 1, 3$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos



Sabemos que $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$. $f'(x)$ es un cociente cuyo denominador es un polinomio al cuadrado, por lo que el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que es un polinomio de 1º grado con coeficiente de x positivo (gráficamente una línea recta de pendiente positiva). Por lo tanto:



$f(x)$ es creciente en $(2, 3) \cup (3, +\infty)$
y decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

d) Del apartado anterior obtenemos que hay un extremo local en $x = 2$. Como a la izquierda de 2 $f(x)$ es decreciente y a la derecha creciente, en $x = 2$ hay un mínimo local.

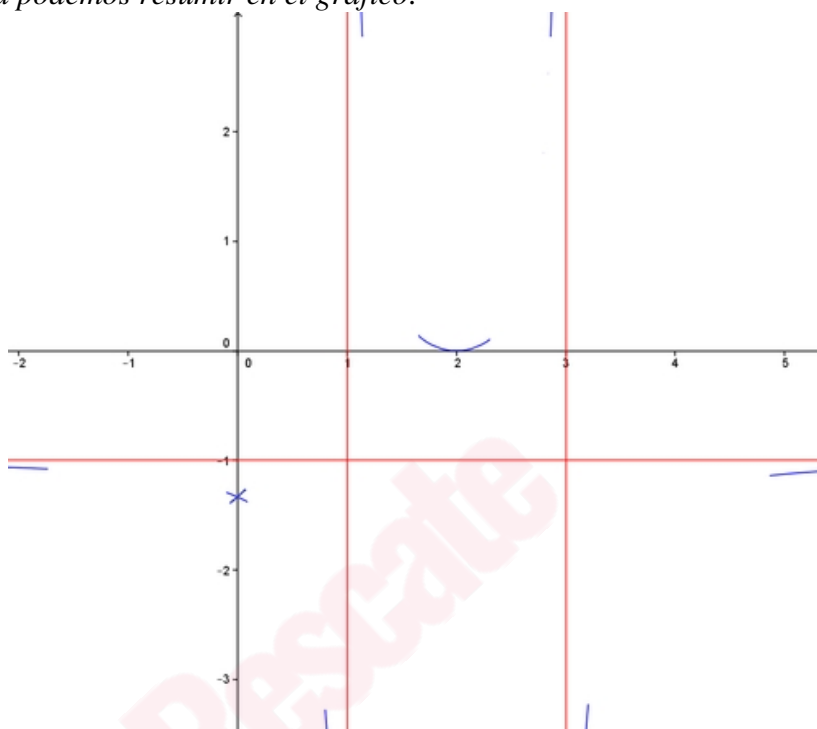
De lo calculado en el apartado a), para $x = 2$ $y = 0$. Por lo tanto $f(x)$ tiene un mínimo local en $(2, 0)$.

e) La información de los apartados anteriores la podemos resumir en el gráfico:

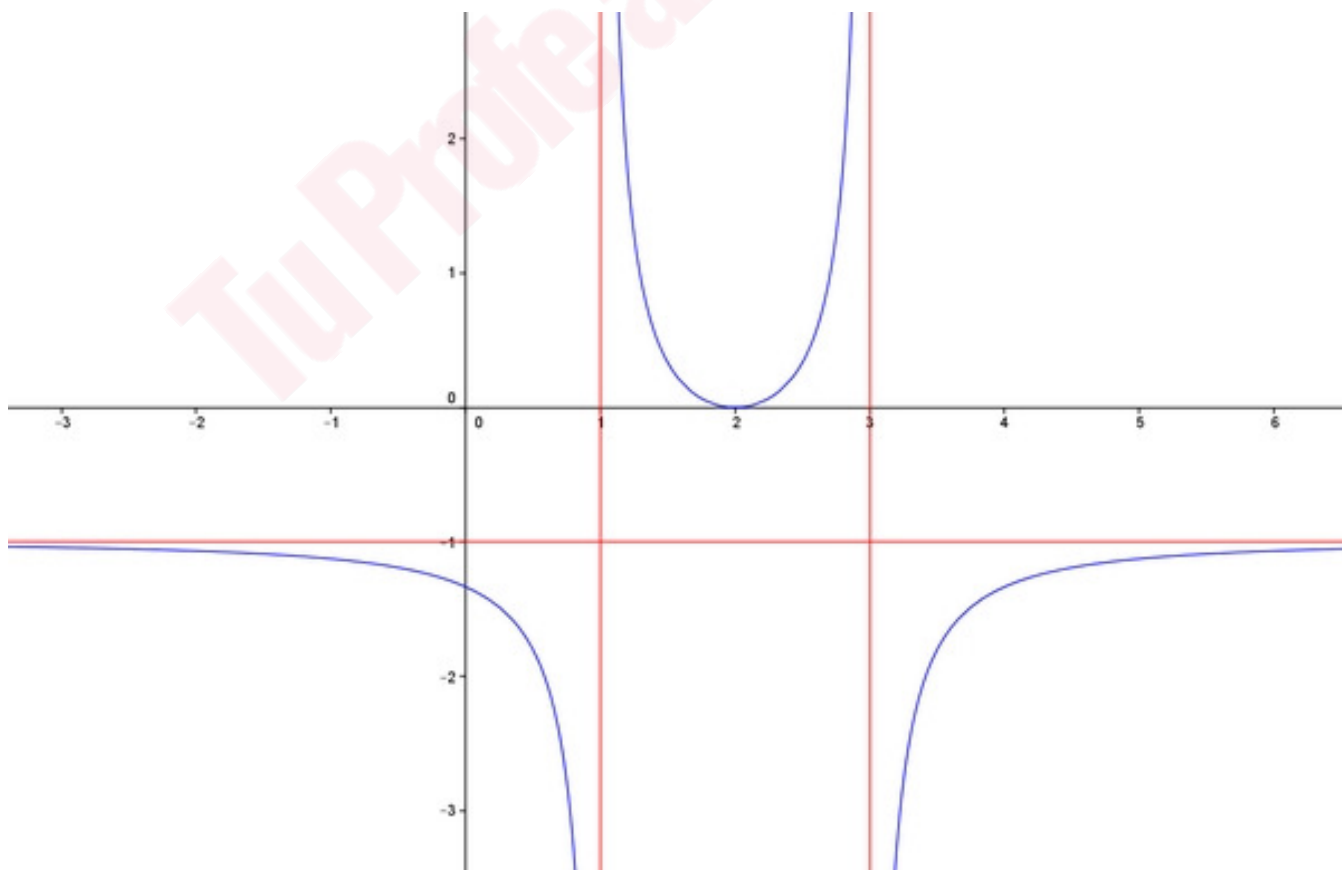
Asíntotas verticales y horizontales en rojo ($x = 1$, $x = 3$ e $y = -1$)

Punto de corte $(0, -4/3)$

Mínimo local $(2, 0)$



Y la gráfica de la función $f(x)$ (en azul) será:



OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Un tarro contiene 25 caramelos de naranja, 12 de limón y 8 de café. Se extraen dos caramelos al azar. Calcula.

- La probabilidad de que ambos sean de naranja.
- La probabilidad de que ambos sean del mismo sabor.
- La probabilidad de que ninguno sea de café.

Solución:

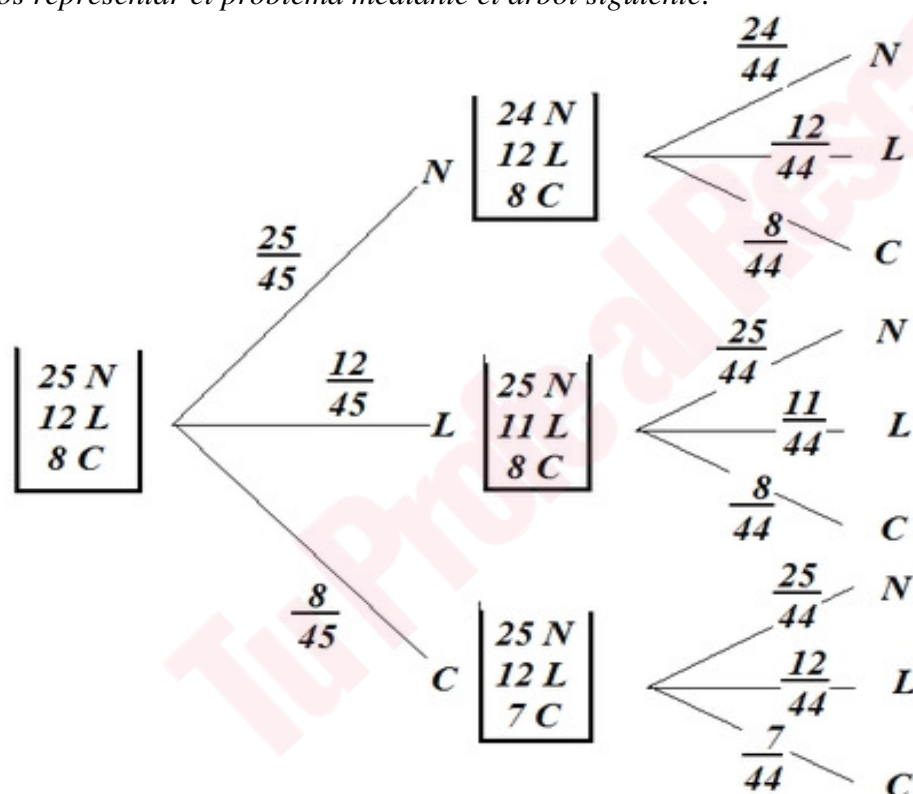
Nombrando los sucesos:

N = el caramelo extraído es de naranja

L = el caramelo extraído es de limón

C = el caramelo extraído es de café

podemos representar el problema mediante el árbol siguiente:



Calculemos las probabilidades pedidas

$$a) p(\text{ambos sean de naranja}) = \frac{25}{45} \cdot \frac{24}{44} = \frac{600}{1980} = \frac{10}{33} = 0,3030$$

$$b) p(\text{ambos sean del mismo sabor}) = \frac{25}{45} \cdot \frac{24}{44} + \frac{12}{45} \cdot \frac{11}{44} + \frac{8}{45} \cdot \frac{7}{44} = \frac{788}{1980} = \frac{197}{495} = 0,3980$$

$$c) p(\text{ninguno de café}) = \frac{25}{45} \cdot \frac{24}{44} + \frac{25}{45} \cdot \frac{12}{44} + \frac{12}{45} \cdot \frac{25}{44} + \frac{12}{45} \cdot \frac{11}{44} = \frac{1332}{1980} = \frac{333}{495} = 0,6727$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una persona adquirió en el mercado cierta cantidad de unidades de memoria externa, de lectores de libros electrónicos y de tabletas gráficas a un precio de 100, 120 y 150 euros la unidad, respectivamente. El importe total de la compra fue de 1160 euros y el número total de unidades adquiridas 9. Además, compró una unidad más de tabletas gráficas que de lectores de libros electrónicos. ¿Cuántas unidades adquirió de cada producto?

Solución:

Llamando: x = número de unidades de memoria externa

y = número de libros electrónicos

z = número de tabletas gráficas

De los datos del problema obtenemos:

El importe total de la compra fue de 1160 € $\rightarrow 100x + 120y + 150z = 1160$

El número total de unidades adquiridas 9 $\rightarrow x + y + z = 9$

Compró una unidad más de tabletas gráficas que de lectores de libros electrónicos $\rightarrow z = y + 1$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 100x + 120y + 150z = 1160 \\ z = y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 10x + 12y + 15z = 116 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 10 & 12 & 15 & 116 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 10 \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 26 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{2} \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 14 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow \frac{7}{2}z = 14 \rightarrow z = \frac{28}{7} = 4$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 2y + 5z = 26; \text{ sustituyendo el valor de } z \rightarrow 2y + 5 \cdot 4 = 26$$

$$2y + 20 = 26$$

$$2y = 26 - 20$$

$$2y = 6 \rightarrow y = 3$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x + y + z = 9; \text{ sustituyendo los valores de } z \text{ e } y \rightarrow x + 3 + 4 = 9$$

$$x + 7 = 9$$

$$x = 9 - 7 \rightarrow x = 2$$

Solución: Adquirió 2 unidades de memoria externa, 3 libros electrónicos y 4 tabletas gráficas.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

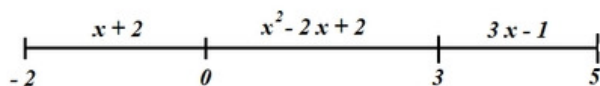
Problema 2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 3x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo $[-2, 5]$.
- Calcula los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 5/2]$
- Calcula $\int_1^2 f(x) dx$.

Solución:

a) $f(x)$ está definida en el intervalo $[-2, 5]$ mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de $f(x)$ es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

$x = 0$

$$1) f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 0+2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 2) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \end{cases} = 2$$

$$3) f(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$

$x = 3$

$$1) f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2x + 2) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 1) = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \end{cases} \quad 5 \neq 8 \rightarrow \text{No existe el límite}$$

Luego $f(x)$ no es continua en $x = 3$

Finalmente, $f(x)$ es continua en $[-2, 5] - \{3\}$ y en $x = 3$ tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Para obtener los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en $[-2, 5/2]$, representemos $f(x)$ en este intervalo. Tengamos en cuenta que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $[-2, 0)$, $f(x) = x + 2$, gráficamente una línea recta, para representarla basta con calcular dos puntos:

$$x = -2, \quad y = -2 + 2 = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0 + 2 = 2$$

En $[0, 5/2]$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, gráficamente una parábola.

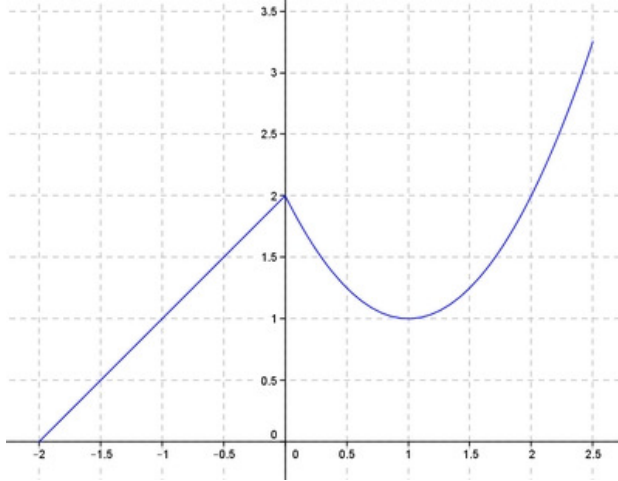
$$\text{Calculemos su vértice, } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \rightarrow \text{Vértice } (1, 1)$$

Como $x = 1 \in [0, 5/2]$, obtengamos los puntos de la parábola en los extremos del intervalo $[0, 5/2]$

Para $x = 0$, $y = 2$ porque la función es continua en $x = 0$, $(0, 2)$

$$\text{Para } x = \frac{5}{2}, \quad y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 = \frac{25}{4} - 5 + 2 = \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4} = 3,25, \quad \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right) = (2,5, 3,25)$$

A partir de los cálculos anteriores, la representación gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0, 5/2]$ será:



La gráfica nos indica que en el intervalo $[0, 5/2]$ la función $f(x)$ tiene:

un mínimo absoluto en el punto $(1, 1)$ y

un máximo absoluto en $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right)$

c)

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \text{como en el intervalo } [1, 2] \text{ } f(x) = x^2 - 2x + 2 = \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 2 \cdot 1 \right) = \left(\frac{8}{3} - 4 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 2 \right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3} \right) = \\ &= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_1^2 f(x) dx = \frac{4}{3}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

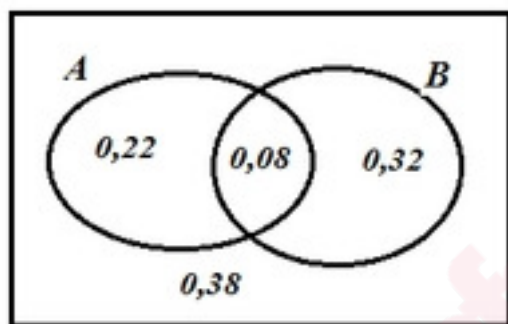
Problema 3. Sabiendo que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$ y $P(A/B) = 0,2$, contesta las siguientes cuestiones:

- Calcula $P(\bar{A} \cup B)$.
- Calcula $P(B/A)$.
- Calcula $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
- ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Solución:

Como $P(A/B) = 0,2 \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,2 \rightarrow P(A \cap B) = 0,2 \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$

Representamos los sucesos A y B en un diagrama de Venn e indicamos la probabilidad de cada una de las partes,



$$P(A) = 0,3, \quad 0,3 - 0,08 = 0,22$$

$$P(B) = 0,4, \quad 0,4 - 0,08 = 0,32$$

$$1 - (0,22 + 0,08 + 0,32) = 0,38$$

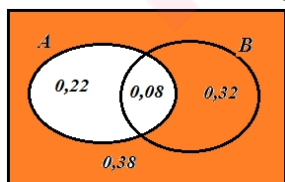
$$a) P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$$

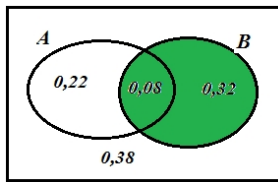
$$P(\bar{A} \cap B) =$$

Vamos el suceso $\bar{A} \cap B$ en el diagrama de Venn,

$\bar{A}$ es

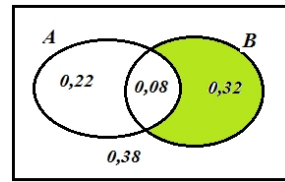


B es



por lo tanto

$\bar{A} \cap B$ es:



Es decir, $P(\bar{A} \cap B) = 0,32$

$$\text{Finalmente, } P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 0,7 + 0,4 - 0,32 = 0,78$$

$$b) P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,08}{0,3} = 0,2667$$

c) $P(\overline{A \cap B}) = (\text{por las leyes de Morgan}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$
 Calculemos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,08 = 0,62$
 $\overset{*}{=} 1 - 0,62 = 0,38$

d) Los sucesos A y B serán independientes si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,08 \\ P(A) P(B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \end{array} \right\} \rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) P(B)$$

Por lo tanto, los sucesos A y B no son independientes.

Tu Profecia al Rescate