

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2008

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Discusión de un sistema con parámetro

El sistema tiene dos incógnitas y depende del parámetro a :

$$\begin{cases} x - ay = 2, \\ ax - y = a + 1. \end{cases}$$

Para discutirlo aplicamos Rouché-Frobenius, comparando los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada. Si el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, habrá una solución única.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{pmatrix}, \quad \det A = a^2 - 1 = (a-1)(a+1).$$

Si $a \neq \pm 1$, el determinante es distinto de cero, de modo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$, igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. De la primera ecuación, $x = 2 + ay$; al sustituir en la segunda,

$$2a + a^2y - y = a + 1 \implies (a^2 - 1)y = 1 - a,$$

y, como $a \neq \pm 1$,

$$y = -\frac{1}{a+1}, \quad x = 2 - \frac{a}{a+1} = \frac{a+2}{a+1}.$$

Para los valores que anulan el determinante hay que comparar los rangos por separado. Si $a = 1$, las dos ecuaciones se reducen a $x - y = 2$; ambas filas de A^* son proporcionales, por lo que los dos rangos valen $1 < 2$. Si $a = -1$, las ecuaciones son $x + y = 2$ y $-x - y = 0$; la matriz de coeficientes tiene rango 1, pero la ampliada tiene rango 2. **Conclusión.** Para $a = 1$ hay infinitas soluciones; para $a = -1$ no hay solución; y para $a \neq \pm 1$ la solución única es $\left(\frac{a+2}{a+1}, -\frac{1}{a+1}\right)$.

En el apartado b) buscamos los valores de a para los que existe una solución con $y = 2$. En el caso determinado imponemos esta condición a la expresión obtenida:

$$-\frac{1}{a+1} = 2 \implies a = -\frac{3}{2}.$$

Este valor pertenece al caso $a \neq \pm 1$. Además, cuando $a = 1$ el sistema es $x - y = 2$, que admite, por ejemplo, $(x, y) = (4, 2)$. Para $a = -1$ no existe solución. **Conclusión.** El sistema tiene alguna solución con $y = 2$ si $a = 1$ o $a = -\frac{3}{2}$.

Opción A - Ejercicio 2. Posición relativa y distancia entre rectas

Tomamos un parámetro para describir cada recta en forma paramétrica. En r , hacemos $y = t$; en s , hacemos $z = u$:

$$r : (x, y, z) = (2, 0, 1) + t(a, 1, -a), \quad s : (x, y, z) = (1, 3, 0) + u(1, -1, 1).$$

Sus vectores directores son $\vec{u} = (a, 1, -a)$ y $\vec{v} = (1, -1, 1)$. No son proporcionales para ningún a : si lo fueran, la segunda coordenada obligaría a que el factor fuese -1 , lo que exigiría simultáneamente $a = -1$ y $-a = -1$, una contradicción. Por tanto, las rectas nunca son paralelas ni coincidentes.

Para decidir si son coplanarias calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{PQ}$, con $P = (2, 0, 1) \in r$ y $Q = (1, 3, 0) \in s$, junto con sus vectores directores:

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 3, -1), \quad \vec{u} \times \vec{v} = (1 - a, -2a, -a - 1),$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -4a.$$

El producto mixto es cero exactamente cuando los vectores son coplanarios. Como las rectas no son paralelas, en ese caso se cortan. Para $a = 0$, resolviendo la igualdad de las parametrizaciones se obtiene $t = 2$, $u = 1$ y el punto común $(2, 2, 1)$. Si $a \neq 0$, no son coplanarias y, por ello, son rectas cruzadas. **Conclusión.** Si $a = 0$, las rectas son secantes en $(2, 2, 1)$; si $a \neq 0$, son cruzadas.

Para $a = 1$ son cruzadas. La distancia entre dos rectas cruzadas se calcula con

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|},$$

donde el numerador mide el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores y el denominador es el área de la base. Así, el cociente da la altura, que es la distancia mínima entre las rectas. Con $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (1, -1, 1)$,

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, -2, -2), \quad |\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = 4, \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 2\sqrt{2}.$$

Conclusión. La distancia mínima entre r y s para $a = 1$ es $\sqrt{2}$.

Opción A - Ejercicio 3. Límites en el infinito

a) Para comparar e^x con x^2 , estudiamos el cociente x^2/e^x . Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Por tanto, $e^x - x^2 = e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)$ es el producto de una cantidad que tiende a $+\infty$ por otra que tiende a 1.

Conclusión. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = +\infty$.

b) Dividimos numerador y denominador por la exponencial dominante del denominador, 6^x :

$$\frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \frac{(2/3)^x + (5/6)^x}{(1/2)^x + 1}.$$

Como las bases del numerador están entre 0 y 1, ambas potencias tienden a cero, mientras que el denominador tiende a 1. **Conclusión.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = 0$.

Opción A - Ejercicio 4. Extremos relativos y punto de inflexión

La función es $f(x) = x(\ln x)^2$. Como contiene $\ln x$, su dominio es $x > 0$. Los extremos se localizan entre los puntos críticos, que obtenemos resolviendo $f'(x) = 0$; para hallar los puntos de inflexión estudiaremos además la segunda derivada.

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2).$$

Los puntos críticos son $x = 1$ y $x = e^{-2}$. El signo de f' queda determinado por los dos factores:

x	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, +\infty)$
$\ln x$	-	-	+
$\ln x + 2$	-	+	+
$f'(x)$	+	-	+

Así, la función crece en $(0, e^{-2})$, decrece en $(e^{-2}, 1)$ y vuelve a crecer en $(1, +\infty)$. El cambio de creciente a decreciente da un máximo relativo en $x = e^{-2}$, y el cambio de decreciente a creciente da un mínimo relativo en $x = 1$:

$$f(e^{-2}) = e^{-2}(-2)^2 = \frac{4}{e^2}, \quad f(1) = 0.$$

Para estudiar la concavidad derivamos de nuevo:

$$f''(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}.$$

Como $x > 0$, el signo depende de $\ln x + 1$, que se anula en $x = e^{-1}$. Cambia de negativo a positivo, por lo que allí hay un punto de inflexión, de ordenada $f(e^{-1}) = e^{-1}$. **Conclusión.** Hay un máximo relativo en $(e^{-2}, \frac{4}{e^2})$, un mínimo relativo en $(1, 0)$ y un punto de inflexión en $(e^{-1}, \frac{1}{e})$.

Opción B - Ejercicio 1. Determinantes de una familia de matrices

La matriz A_n tiene primera fila formada por unos; debajo de la diagonal sus entradas son -1 , en la diagonal son 9 y por encima de ella son 1. Para hallar su determinante sin desarrollar muchos términos, hacemos, en orden descendente, las operaciones $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ para $j = n, n-1, \dots, 2$. Estas operaciones no cambian el determinante y la primera fila queda $(1, 0, \dots, 0)$. En las columnas restantes, el bloque inferior es triangular superior y tiene 10 en cada elemento diagonal: cada uno procede de restar -1 a 9.

$$\det(A_n) = 1 \cdot 10^{n-1} = 10^{n-1}.$$

En particular,

$$\det(A_2) = 10, \quad \det(A_3) = 100, \quad \det(A_5) = 10^4 = 10000.$$

Conclusión. Los determinantes pedidos son 10, 100 y 10000, respectivamente.

Opción B - Ejercicio 2. Área y optimización

En el intervalo $[0, 1]$, la función $f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$ es positiva porque $c > 0$ y todos sus términos son no negativos. Por tanto, el área comprendida entre su gráfica y el eje OX es la integral de f en ese intervalo:

$$S(c) = \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx = \left[\frac{c}{5}x^5 + \frac{1}{3c}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1.$$

Para minimizar esta área con $c > 0$, derivamos S y buscamos sus puntos críticos:

$$S'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0 \implies c^2 = \frac{5}{3}.$$

La condición $c > 0$ selecciona $c = \sqrt{5/3}$. Además, $S''(c) = \frac{2}{3c^3} > 0$ para todo $c > 0$, así que este punto crítico es un mínimo. Su valor es

$$S\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Conclusión. El área es mínima para $c = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y el área mínima vale $1 + \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Opción B - Ejercicio 3. Coplanaridad y distancia de un punto a un plano

Los puntos son $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$. Tomando A como origen de los vectores, calculamos las diferencias de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, -3), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (1, 2, -1).$$

Cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto de estos tres vectores es cero. Primero,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 3, 1), \quad (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 2 + 6 - 1 = 7 \neq 0.$$

Por ello, los cuatro puntos no son coplanarios. El vector $(2, 3, 1)$ es normal al plano que pasa por A, B, C , pues es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y a $\overrightarrow{AC}$. Usando el punto A obtenemos

$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

La distancia de D a un plano $Ax + By + Cz + D_0 = 0$ se calcula mediante

$$d(D, \pi) = \frac{|Ax_D + By_D + Cz_D + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos las coordenadas de D y los coeficientes del plano:

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Conclusión. Los puntos no son coplanarios, el plano ABC es $2x + 3y + z - 1 = 0$ y $d(D, \pi) = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Opción B - Ejercicio 4. Perpendicular a un plano, intersecciones y área

El plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ tiene vector normal $\vec{n} = (3, 2, -1)$. La recta perpendicular a π que pasa por $P(1, 2, 3)$ debe tener como vector director precisamente ese vector normal; la escribimos en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 2, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para hallar $Q = r \cap \pi$, sustituimos $x = 1 + 3t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 - t$ en la ecuación del plano:

$$3(1 + 3t) + 2(2 + 2t) - (3 - t) + 10 = 14 + 14t = 0,$$

de donde $t = -1$ y $Q = (-2, 0, 4)$. La intersección R del plano con el eje OY cumple $x = z = 0$; entonces $2y + 10 = 0$, así que $R = (0, -5, 0)$.

El área del triángulo PQR se obtiene como la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que parten del mismo vértice:

$$\mathcal{A}_{PQR} = \frac{1}{2} \|\vec{PQ} \times \vec{PR}\|.$$

Las diferencias de coordenadas son

$$\vec{PQ} = Q - P = (-3, -2, 1), \quad \vec{PR} = R - P = (-1, -7, -3),$$

por lo que

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = (13, -10, 19), \quad \|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \sqrt{13^2 + (-10)^2 + 19^2} = 3\sqrt{70}.$$

Conclusión. El área del triángulo PQR es $\frac{3\sqrt{70}}{2}$.