

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para repasar todos los contenidos, desarrollamos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

Sean x e y la anchura y la altura, en centímetros, de la zona impresa. La condición de superficie impresa fija $xy = 100$, así que $y = 100/x$, con $x > 0$. La tarjeta añade 5 cm a cada lado, 2 cm en el margen superior y 3 cm en el inferior. Por tanto, sus dimensiones son $x + 10$ e $y + 5$, y el papel utilizado tiene área

$$S(x) = (x + 10)(y + 5) = (x + 10) \left(\frac{100}{x} + 5 \right) = 150 + 5x + \frac{1000}{x}.$$

Para minimizar la cantidad de papel, derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$S'(x) = 5 - \frac{1000}{x^2} = 0 \implies x^2 = 200 \implies x = 10\sqrt{2},$$

donde descartamos la raíz negativa porque una longitud debe ser positiva. Además, $S''(x) = 2000/x^3 > 0$ para $x > 0$, por lo que este punto es un mínimo. La altura impresa y las dimensiones de la tarjeta son

$$y = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}, \quad \boxed{\text{anchura} = 10 + 10\sqrt{2} \text{ cm}, \quad \text{altura} = 5 + 5\sqrt{2} \text{ cm}.}$$

Opción A - Ejercicio 2

Integramos dos veces $f''(x) = xe^x$. En la primera integración usamos partes, pues el integrando es un producto de un polinomio y una exponencial:

$$f'(x) = \int xe^x dx = (x - 1)e^x + C_1.$$

Volvemos a integrar:

$$f(x) = \int ((x - 1)e^x + C_1) dx = (x - 2)e^x + C_1x + C_2.$$

La gráfica pasa por el origen, es decir, $f(0) = 0$. Así,

$$-2 + C_2 = 0 \implies C_2 = 2.$$

Que haya un extremo relativo en $x = 1$ exige $f'(1) = 0$:

$$(1 - 1)e + C_1 = 0 \implies C_1 = 0.$$

Por tanto, la función es

$$\boxed{f(x) = (x - 2)e^x + 2}.$$

Comprobamos la naturaleza del extremo: $f''(1) = e > 0$, así que en $x = 1$ hay un mínimo relativo, cuyo valor es $f(1) = 2 - e$.

Opción A - Ejercicio 3

Escribimos la matriz ampliada y calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{array} \right),$$

$$\det A = 1(0(m-2) - 9) - 1(2(m-2) - 3) + 1(6) = 4 - 2m = 2(2 - m).$$

Si $m \neq 2$, el determinante es distinto de cero; por ello $\text{rg}(A) = 3$, y Rouché-Frobenius garantiza un sistema compatible determinado.

Para $m = 2$, el determinante se anula. El menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

muestra que $\text{rg}(A) \geq 2$; como $\det A = 0$, resulta $\text{rg}(A) = 2$. Además, en la matriz ampliada la tercera fila es $3F_1 - F_2$:

$$3(1, 1, 1 | 2) - (2, 0, 3 | 5) = (1, 3, 0 | 1),$$

de modo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Los rangos coinciden y son menores que el número de incógnitas, así que para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado. No aparece ningún caso incompatible.

b) Para $m = 2$, imponemos además $z = 17$. La segunda ecuación da $2x + 3z = 5$, luego $x = -23$. La tercera, $x + 3y = 1$, da $y = 8$. Comprobamos en la primera:

$$-23 + 8 + 17 = 2.$$

Una solución solicitada es $(x, y, z) = (-23, 8, 17)$.

Opción A - Ejercicio 4

Como A, B, C, D son vértices consecutivos, los lados adyacentes desde B son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, 2) - (1, 1, 1) = (1, 1, 1),$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 3, 3) - (2, 2, 2) = (-1, 1, 1).$$

a) El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de dos lados adyacentes:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (0, -2, 2), \quad \mathcal{A} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

b) El producto vectorial anterior es normal al plano. Usamos su versión proporcional $\vec{n} = (0, -1, 1)$ y el punto A :

$$0(x - 1) - (y - 1) + (z - 1) = 0 \implies y - z = 0.$$

c) Las diagonales de un paralelogramo se bisecan, por lo que $A + C = B + D$. Despejando D :

$$D = A + C - B = (1, 1, 1) + (1, 3, 3) - (2, 2, 2) = (0, 2, 2).$$

Opción B - Ejercicio 1

La función $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ es suma de exponenciales, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Su derivada permite estudiar el crecimiento:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Si $x < 0$, entonces $e^x < e^{-x}$ y $f'(x) < 0$; si $x > 0$, entonces $e^x > e^{-x}$ y $f'(x) > 0$. Por tanto, f decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. La derivada cambia de negativa a positiva en $x = 0$, así que hay un mínimo:

$$f(0) = 1, \quad \text{mínimo relativo en } (0, 1).$$

La pendiente de la tangente en $x = 0$ es $f'(0) = 0$, de modo que la tangente es horizontal. La normal es perpendicular a ella y pasa por $(0, f(0)) = (0, 1)$; por tanto,

$$x = 0.$$

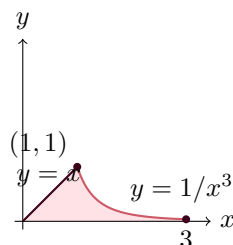
Opción B - Ejercicio 2

Las curvas $y = x$ e $y = 1/x^3$ se cortan en el primer cuadrante cuando

$$x = \frac{1}{x^3} \implies x^4 = 1 \implies x = 1, \quad y = 1.$$

El recinto cerrado junto con el eje OX y la recta $x = 3$ queda bajo $y = x$ entre $x = 0$ y $x = 1$, y bajo $y = 1/x^3$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

a) El esbozo representa esa frontera y señala el cambio de curva superior en $(1, 1)$:



b) Como el área es la integral de la frontera superior menos el eje OX , la separamos donde cambia esa frontera:

$$A = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^3 = \frac{1}{2} + \frac{4}{9} = \boxed{\frac{17}{18}}.$$

c) Si sustituimos $1/x^3$ por $1/x$, la frontera del primer tramo sigue siendo $y = x$, pues para $0 < x < 1$, $1/x > x$. En el tramo $1 < x \leq 3$, se cumple $1/x > 1/x^3$; por ello el nuevo recinto tiene más área:

$$A_{\text{nueva}} = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} + \ln 3 > \frac{17}{18}.$$

Opción B - Ejercicio 3

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

a) El rango es tres cuando el determinante es distinto de cero. Calculamos:

$$\det A = k^2(k+1) + k(k+1)^2 = k(k+1)(2k+1).$$

Así, $\text{rg}(A) = 3$ si $k \notin \{0, -1, -1/2\}$. Para los tres valores que anulan el determinante, un menor de orden dos permite comprobar que el rango no baja a uno:

k	menor no nulo	valor
0	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1
-1	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	1
$-\frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$	$\frac{1}{4}$

En cada caso $\text{rg}(A) \geq 2$, y como el determinante es cero, $\text{rg}(A) = 2$. En conclusión,

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & k \notin \{0, -1, -\frac{1}{2}\}, \\ 2, & k \in \{0, -1, -\frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

b) Para $k = 1$, la matriz A es invertible y $\det A = 6$. Usamos que el determinante de un producto es el producto de los determinantes, que $\det(A^t) = \det A$, y que $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. Si $M = A^t A^{-1}$, entonces

$$\det M = \det(A^t) \det(A^{-1}) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1, \quad \det(M^{2017}) = (\det M)^{2017} = 1.$$

Como M^{2017} es de orden 3, multiplicar toda la matriz por 2 multiplica su determinante por 2^3 :

$$\det(2(A^t A^{-1})^{2017}) = 8.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r , intersección de $x - 2y = -5$ y $z = 2$, se escribe en forma paramétrica tomando $y = t$:

$$r : \begin{cases} x = -5 + 2t, \\ y = t, \\ z = 2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pasa por $Q = (-5, 0, 2)$ y tiene vector director $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

a) Para formar un plano que contenga a r y a $P = (0, 1, 1)$, añadimos el vector $\overrightarrow{QP} = P - Q = (5, 1, -1)$. El producto vectorial de estos vectores es normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{QP} = (2, 1, 0) \times (5, 1, -1) = (-1, 2, -3).$$

Usando el punto Q :

$$-(x+5) + 2y - 3(z-2) = 0 \implies \boxed{x - 2y + 3z - 1 = 0}.$$

b) Proyectamos P ortogonalmente sobre r . Si $H = Q + t\vec{v}$, la condición $(P - H) \cdot \vec{v} = 0$ da

$$t = \frac{(P - Q) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(5, 1, -1) \cdot (2, 1, 0)}{2^2 + 1^2} = \frac{11}{5}.$$

Por tanto,

$$H = Q + \frac{11}{5}\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right).$$

El punto simétrico P' cumple que H es el punto medio de PP' :

$$P' = 2H - P = \left(-\frac{6}{5}, \frac{22}{5}, 4\right) - (0, 1, 1) = \boxed{\left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)}.$$