

Características de la prueba.

Se ofertarán a los alumnos dos ejercicios y éstos elegirán uno. Cada uno de dichos ejercicios propondrá la resolución de cuatro problemas. Los alumnos tendrán que elegir tres de entre los cuatro propuestos. EN NINGÚN CASO SE PODRÁ ELEGIR SIMULTÁNEAMENTE EL PROBLEMA 4.1 Y EL PROBLEMA 4.2

Independientemente del ejercicio escogido, cada uno de los cuatro problemas propuestos contribuirá por igual a la calificación del ejercicio.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Calcular los valores $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases}, \text{ donde } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$$

(3,3 puntos)

PROBLEMA 2. Se considera el plano $\pi : y + z - 12m = 0$ (m parámetro real) y la rectas

$$u: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}, v: \begin{cases} x=2 \\ y=2z \end{cases}, w: \begin{cases} x=3 \\ y=3z \end{cases}$$

Sean A, B y C los puntos de intersección de π con u , v y w , respectivamente.

- Calcular las coordenadas de A, B y C en función de m (1,8 puntos)
- Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a. (1,5 puntos)

PROBLEMA 3. Dadas las curvas $y = (x-1)^3$, $y = 5 - x^2$ calcular razonadamente:

- Su punto de corte (1,1 puntos).
- El área encerrada por ellas y el eje OY (2,2 puntos).

PROBLEMA 4.1. Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30% del volumen de la misma (3,3 puntos).

PROBLEMA 4.2. Cien alumnos prepararon un examen de matemáticas. Se representa por x el número de problemas hecho por cada alumno en la preparación y por y la calificación obtenida. Sabiendo que las medias aritméticas de esas variables fueron: $\bar{x} = 9,2$ e $\bar{y} = 7,5$, que el coeficiente de correlación entre esas variables fue 0,7 y que la desviación típica de la variable y fue el doble que la de la variable x , se pide obtener, razonadamente:

- Las ecuaciones de las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y (2 puntos).
- La calificación que la adecuada recta de regresión predice para un alumno que sólo hizo 6 problemas durante la preparación del examen (1,3 puntos).

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. El sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 1 \\ x + \alpha y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha^2 y + \alpha^2 z = \alpha^2 \end{cases}$$
 depende del parámetro real α .

Discutir para que valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado (2 puntos), y resolverlo en las casos compatibles (1,3 puntos).

PROBLEMA 2. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto $(-7, 2, -3)$ y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta $(x,y,z) = (0,4,1) + t(1,0,0)$ (3,3 puntos).

PROBLEMA 3. Hallar las constantes reales a y b para que

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x + a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea una función continua para todo valor real x (3,3 puntos).

PROBLEMA 4.1 La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es $C(t) = -0,29483 t + 0,04253 t^2 - 0,00035 t^3$ mg/ml, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

- Calcular el periodo de tiempo durante el cual el fármaco actúa (1,8 puntos).
- Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima (1,5 puntos).

PROBLEMA 4.2. De una urna que contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras se extraen bolas sucesivamente y sin devolución. Obtener razonadamente cuántas bolas hay que extraer para que:

- La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea $\frac{29}{30}$ (2,8 puntos).
- La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea 1 (0,5 puntos).

