

**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD**
CURSO 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a , b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función f definida por $f(x) = ax \ln(x) - bx$ para $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^2 f(x) dx = 8 \ln(2) - 9.$$

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) **[0,75 puntos]** Determina, si existen, los valores de a , b y c para los que las matrices A y B conmutan.
b) **[1 punto]** Calcula A^2 , A^3 , A^{2017} y A^{2018} .
c) **[0,75 puntos]** Calcula, si existe, la matriz inversa de A .

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

- a) **[1 punto]** Estudia y determina la posición relativa de r y s .
b) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre r y s .

**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD**

CURSO 2017-2018

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

- a) [1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.
b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

Ejercicio 2.- Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

- a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.
b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.
c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .
b) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}.$$

- a) [1,5 puntos] Halla los valores de m y n para que r y s se cortan perpendicularmente.
b) [1 punto] Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

SOLUCIONES

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a , b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

Para que la función sea continua debe serlo en $x = 0$ y para ello deben coincidir los límites laterales.

Límite por la izquierda ($x < 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + bx + c = c$$

Límite por la derecha ($x > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{1 - 1 - 0}{0 - \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{0 + \operatorname{sen} x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

Si tiene un máximo relativo en $x = -1$ la derivada debe de anularse en ese punto.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } x \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 2a(-1) + b = -2a + b \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow -2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2a}$$

Si la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2 significa que la derivada en $x = -2$ vale 2.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } x \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} f'(-2) = 2a(-2) + b = -4a + b \\ f'(-2) = 2 \end{cases} \Rightarrow -4a + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 4a + 2}$$

Juntamos las dos ecuaciones y hallamos los valores de a y b .

$$\begin{cases} b = 2a \\ b = 4a + 2 \end{cases} \Rightarrow 2a = 4a + 2 \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{-2} = -1} \Rightarrow \boxed{b = 2 \cdot (-1) = -2}$$

Los valores obtenidos son $a = -1$, $b = -2$ y $c = 2$.

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función f definida por $f(x) = ax \ln(x) - bx$ para $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^2 f(x) dx = 8 \ln(2) - 9.$$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = 1$ significa que su derivada se anula en dicho valor.

$$f(x) = ax \ln(x) - bx \quad \text{para } x > 0 \Rightarrow f'(x) = a \ln(x) + ax \cdot \frac{1}{x} - b = a \ln(x) + a - b$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = a \ln(1) + a - b = a - b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow \boxed{a = b}$$

Calculamos la integral indefinida y después la definida.

$$\int f(x) dx = \int ax \ln x - ax dx = \int ax \ln x dx - \int ax dx = \int ax \ln x dx - a \frac{x^2}{2} = \dots$$

$$\int ax \ln x dx = a \int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración} \\ \text{por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = a \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \right) = a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) = a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right)$$

$$\dots = a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) - a \frac{x^2}{2} = a \frac{x^2}{2} \ln x - a \frac{x^2}{4} - a \frac{x^2}{2}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[a \frac{x^2}{2} \ln x - a \frac{x^2}{4} - a \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left[a \frac{2^2}{2} \ln 2 - a \frac{2^2}{4} - a \frac{2^2}{2} \right] - \left[a \frac{1^2}{2} \ln 1 - a \frac{1^2}{4} - a \frac{1^2}{2} \right] =$$

$$= 2a \ln 2 - a - 2a - \left[0 - \frac{a}{4} - \frac{a}{2} \right] = 2a \ln 2 - \frac{4a}{4} - \frac{8a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{2a}{4} = 2a \ln 2 - \frac{9a}{4} = \frac{8a \ln 2 - 9a}{4}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = 8 \ln(2) - 9 \Rightarrow \frac{8a \ln 2 - 9a}{4} = 8 \ln 2 - 9 \Rightarrow 8a \ln 2 - 9a = 32 \ln 2 - 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(8 \ln 2 - 9) = 32 \ln 2 - 36 \Rightarrow a = \frac{32 \ln 2 - 36}{8 \ln 2 - 9} = \frac{4(8 \ln 2 - 9)}{8 \ln 2 - 9} = 4$$

Los valores buscados son $a = b = 4$

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de a , b y c para los que las matrices A y B conmutan.

b) [1 punto] Calcula A^2 , A^3 , A^{2017} y A^{2018} .

c) [0,75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de A .

a) Debe cumplirse que $A \cdot B = B \cdot A$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = c \\ 0 = -b \\ 0 = a \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{matrix}}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 A = AA = A^2 = Id_3$$

Si el exponente " n " es par la potencia $A^n = Id_3$.

Si el exponente " n " es impar la potencia $A^n = A$.

Como 2017 es impar se tiene que $A^{2017} = A$.

Como 2018 es par se tiene que $A^{2018} = Id_3$.

c) La matriz inversa de A existe si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-1 + 0 + 0) = 1 \neq 0$$

Existe la inversa y la calculamos (aunque si miramos el resultado del apartado b) podemos decir que su inversa es la misma matriz A , pues $A \cdot A = A^2 = Id_3$).

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre r y s .

a) Obtengamos los vectores directores y un punto de ambas rectas.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2,1,3) \\ P_r(-1,0,-1) \end{array} \right\}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3y-5 \\ 2z=y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y-5}{2} \\ z = \frac{y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2}y \\ y = y \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow$$

Hallamos dos puntos de la recta s y de ahí obtenemos el vector director.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2}y = -1 \\ y = 1 \rightarrow y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P_s(-1,1,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{-5}{2} - \frac{3}{2}y = -4 \\ y = -1 \rightarrow y = -1 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q_s(-4,-1,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \overrightarrow{P_s Q_s} = (-4,-1,0) - (-1,1,1) = (-3,-2,-1) \\ P_s(-1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Para ser paralelas o coincidentes los vectores directores deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2,1,3) \\ \vec{v}_s = (-3,-2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{2}{-3} = \frac{1}{-2} = \frac{3}{-1} \text{?} \quad \text{¡NO ES CIERTO!}$$

Por lo que no son paralelas ni coincidentes. ¿Son secantes o se cruzan?

Calculamos el producto mixto de los dos vectores directores y del vector que une un punto de una recta con un punto de la otra. Si es nulo son secantes y en caso contrario se cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2,1,3) \\ \vec{v}_s = (-3,-2,-1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (-1,1,1) - (-1,0,-1) = (0,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 0 - 9 - (0 - 6 - 2) = -9 \neq 0$$

Las rectas r y s se cruzan.

b) La distancia se obtiene con la división entre el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores anteriores $\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}\right]$ y el área del paralelogramo definido por los vectores directores.

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto obtenido en el apartado anterior: $Volumen = \left|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}\right]\right| = |-9| = 9 u^3$.

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (-3, -2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -i - 9j - 4k + 3k + 2j + 6i = 5i - 7j - k = (5, -7, -1)$$

$$\text{Área} = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| = |(5, -7, -1)| = \sqrt{5^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{75} u^2$$

Por lo que aplicando la fórmula tenemos que:

$$\boxed{\text{Distancia}(r, s)} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área}} = \frac{\left|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}\right]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{9}{\sqrt{75}} = 1,039 u$$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

a) [1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

a) Si la función presenta un extremo relativo en $x = 1$ entonces la derivada se anula en $x = 1$.

$$f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x \Rightarrow f'(x) = a \frac{1}{x} + 2bx + 1$$

$$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 = a \frac{1}{1} + 2b \cdot 1 + 1 = a + 2b + 1 \Rightarrow a = -1 - 2b$$

Si la función presenta un extremo relativo en $x = 2$ entonces la derivada se anula en $x = 2$.

$$f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x \Rightarrow f'(x) = a \frac{1}{x} + 2bx + 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 = a \frac{1}{2} + 2b \cdot 2 + 1 = \frac{a}{2} + 4b + 1 \Rightarrow 0 = a + 8b + 2 \Rightarrow a = -2 - 8b$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} a = -2 - 8b \\ a = -1 - 2b \end{array} \right\} \Rightarrow -2 - 8b = -1 - 2b \Rightarrow -2 + 1 = -2b + 8b \Rightarrow -1 = 6b \Rightarrow b = -\frac{1}{6}$$

$$a = -1 - 2\left(-\frac{1}{6}\right) = -1 + \frac{2}{6} = \frac{-6 + 2}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

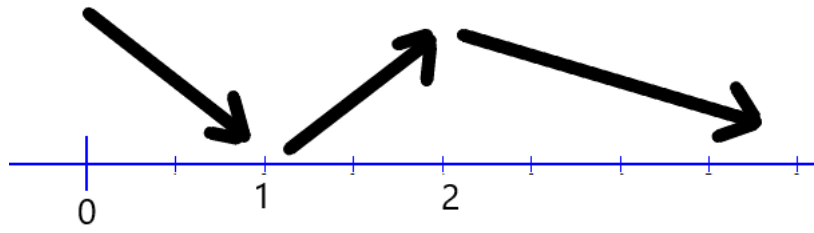
b) La función tiene la expresión $f(x) = -\frac{2}{3} \ln(x) - \frac{1}{6} x^2 + x$ para $x > 0$ y su derivada es

$$f'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1.$$

Veamos como evoluciona la función antes de $x = 1$, entre $x = 1$ y $x = 2$ y después de $x = 2$.

- En $(0,1)$ tomamos $x = 0,5$ y la derivada es $f'(0,5) = -\frac{2}{3 \cdot 0,5} - \frac{0,5}{3} + 1 = -0,5 < 0$, por lo que la función decrece en el intervalo $(0,1)$.
- En $(1,2)$ tomamos $x = 1,5$ y la derivada es $f'(1,5) = -\frac{2}{3 \cdot 1,5} - \frac{1,5}{3} + 1 = \frac{1}{18} > 0$, por lo que la función crece en el intervalo $(1,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada es $f'(3) = -\frac{2}{9} - \frac{3}{3} + 1 = -\frac{2}{9} < 0$, por lo que la función decrece en el intervalo $(2,+\infty)$.

Resumimos esta información en el siguiente gráfico y de ahí podemos establecer los máximos y mínimos relativos de la función.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Tu Profe al Rescate

Ejercicio 2.- Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.

b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.

c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

- a) La recta tangente se obtiene a partir del valor de la función y su derivada en un punto $x = a$ tiene por ecuación: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$f(x) = e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x}$$

La recta tangente a la gráfica tiene ecuación

$$y - e^{-2a} = -2e^{-2a}(x - a) \Rightarrow y = -2e^{-2a}x + 2ae^{-2a} + e^{-2a} \Rightarrow y = -2e^{-2a}x + (2a + 1)e^{-2a}$$

Comparando esta ecuación con la que nos debe salir $y = -2ex$ tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} -2e^{-2a} = -2e \\ (2a + 1)e^{-2a} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e^{-2a} = e \\ (2a + 1)e^{-2a} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a = 1 \\ 2a + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

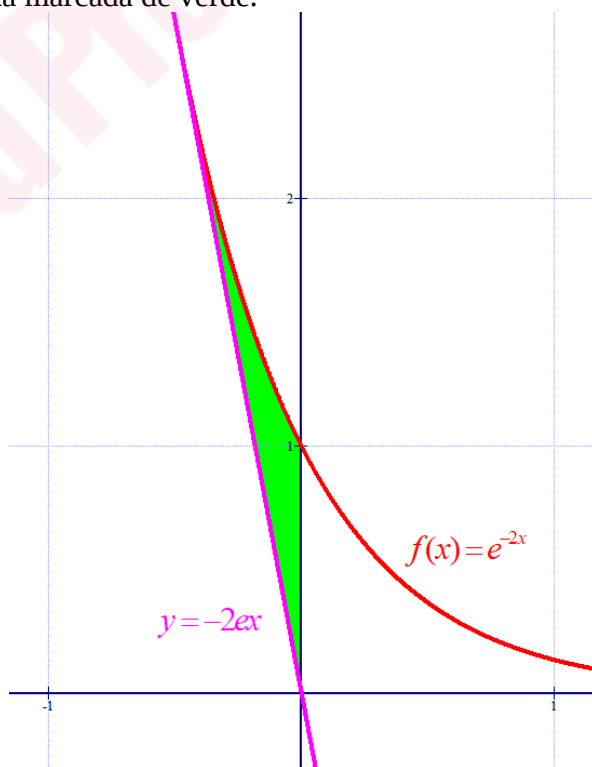
El punto de la gráfica es $x = -\frac{1}{2}$ y sustituyendo en la función $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = e$.

El punto de la gráfica tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$

b)

Para dibujar este recinto determinamos donde se cortan la recta y la tangente, que es el punto de tangencia $x = -\frac{1}{2}$.

Hacemos una tabla de valores para la función $f(x) = e^{-2x}$ y otra para la recta $y = -2ex$. El recinto es la zona marcada de verde.



- c) El área del recinto es la integral definida entre $-0,5$ y 0 de la diferencia entre la función $f(x) = e^{-2x}$ y su tangente $y = -2ex$

$$\int_{-0,5}^0 f(x) - (-2ex) dx = \int_{-0,5}^0 e^{-2x} + 2ex dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} + ex^2 \right]_{-0,5}^0 = \left[\frac{e^{-0}}{-2} + e \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{e^{-2(-0,5)}}{-2} + e(-0,5)^2 \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{2e}{4} - \frac{e}{4} = \boxed{\frac{e-2}{4} = 0,1796 \quad u^2}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .

b) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 0 - (m + 0 - m) = 0$$

El rango de A es menor de 3.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

El rango de A es 2, independientemente del valor de " m ".

$$\text{Consideremos la matriz ampliada asociada al sistema } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m + m + 0 - (m^2 + 0 + m^2) = 2m - 2m^2$$

$$\text{Lo igualamos a cero } \rightarrow 2m - 2m^2 = 0 \Rightarrow 2m(1 - m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{ó} \\ 1 - m = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Consideramos los 3 casos siguientes:

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 de A/B es no nulo y el rango de A/B es 3, como el rango de A es 2 tenemos que los rangos son distintos y por tanto el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 2. $m = 0$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -y} \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow \boxed{z = y}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Siendo las soluciones: $x = -\lambda$; $y = \lambda$; $z = \lambda$

CASO 3. $m = 1$

El sistema queda $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \{1^a \text{ y } 3^a \text{ ecuación son iguales}\} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + (1 + z) + z = 1 \Rightarrow x + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2z}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Siendo las soluciones: $x = -2\lambda$; $y = 1 + \lambda$; $z = \lambda$

b) Para $m = 1$ las soluciones se han obtenido previamente y son $x = -2\lambda$; $y = 1 + \lambda$; $z = \lambda$.

Si queremos obtener una solución con $z = 2$ tomamos $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \cdot 2 = -4 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases}.$$

- a) [1,5 puntos] Halla los valores de m y n para que r y s se cortan perpendicularmente.
b) [1 punto] Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

a) Obtengamos un punto y el vector director de cada una de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, m, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - nz \\ y = -3 + z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (-n, 1, 1) \\ P_s(-2, -3, 0) \end{cases}$$

Para que se corten el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r P_s} = (-2, -3, 0) - (1, -1, 0) = (-3, -2, 0) \\ \vec{v}_r = (2, m, 1) \\ \vec{v}_s = (-n, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 4 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{-3m + 2n + 7 = 0}$$

Y para que se corten perpendicularmente deben ser ortogonales los vectores directores, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, m, 1) \\ \vec{v}_s = (-n, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (2, m, 1)(-n, 1, 1) = 0 \Rightarrow \boxed{-2n + m + 1 = 0}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} -3m + 2n + 7 = 0 \\ -2n + m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m + 2n + 7 = 0 \\ m = 2n - 1 \end{cases} \Rightarrow -3(2n - 1) + 2n + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6n + 3 + 2n + 7 = 0 \Rightarrow -4n + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{n = \frac{10}{4} = 2,5} \Rightarrow \boxed{m = 2 \cdot 2,5 - 1 = 4}$$

Los valores buscados son $m = 4$ y $n = 2,5$

b) Para $m = 3$ y $n = 1$ las rectas se cortan pues cumplen la condición obtenida

$$\left. \begin{array}{l} m = 3 \\ n = 1 \\ -3m + 2n + 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 7 = 0? \quad \text{¡SE CUMPLE!}$$

El vector normal del plano π que contiene a las dos rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i - j + 2k + 3k - 2j - i = 2i - 3j + 5k = (2, -3, 5)$$

El plano π contiene al punto $P_r(1, -1, 0)$ y tiene como vector normal $\vec{n} = (2, -3, 5)$ por lo que su ecuación se obtiene de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, -3, 5) \\ P_r(1, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : 2x - 3y + 5z + D = 0 \\ P_r(1, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 3(-1) + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

$$\boxed{\pi : 2x - 3y + 5z - 5 = 0}$$