

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria 2020-2021

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se resuelven todas para repasar el temario completo.

A.1. Sistema de ecuaciones aplicado a seguidores

Llamamos S , C y J al número de seguidores de Sara, Cristina y Jimena. El total proporciona la primera ecuación. Si Jimena perdiera el 25 %, conservaría el 75 % de sus seguidores; la segunda condición relaciona esa cantidad con la de Sara:

$$\begin{cases} S + C + J = 15000, \\ \frac{3}{4}J = 3S, \\ \frac{1}{2}S + \frac{1}{5}C = \frac{1}{4}J. \end{cases}$$

De la segunda ecuación, multiplicando por 4, obtenemos $J = 4S$. Para eliminar los denominadores de la tercera, multiplicamos por 20:

$$10S + 4C = 5J.$$

Al sustituir $J = 4S$ resulta $10S + 4C = 20S$, de donde $C = \frac{5}{2}S$. Introducimos estas dos relaciones en la ecuación del total:

$$S + \frac{5}{2}S + 4S = 15000 \implies \frac{15}{2}S = 15000 \implies S = 2000.$$

Por tanto, $C = 5000$ y $J = 8000$. Las cantidades cumplen las tres condiciones: suman 15000, el 75 % de 8000 es 6000 = $3 \cdot 2000$, y $\frac{1}{2}(2000) + \frac{1}{5}(5000) = 2000 = \frac{1}{4}(8000)$. **Conclusión.** Sara tiene 2000 seguidores, Cristina 5000 y Jimena 8000.

A.2. Límites e integrales

a) Cálculo de límites

a.1) Al sustituir $x = 0$ se obtiene una indeterminación $0/0$, así que aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-12x}{-4+\sin x} = -\frac{1}{2}.$$

En la primera aplicación aún aparece $0/0$; tras derivar por segunda vez el denominador tiende a $-4 \neq 0$.

Conclusión. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x} = -\frac{1}{2}.$

a.2) Para aprovechar la indicación, hacemos $t = 1/x$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, se tiene $t \rightarrow 0^+$, y el límite se transforma en

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin(1/x)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \left(3t - \frac{2}{\sin t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(3t^2 - 2 \frac{t}{\sin t} \right).$$

Usando el límite notable $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, también $\frac{t}{\sin t} \rightarrow 1$. **Conclusión.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin(1/x)} \right) = -2.$

b) Cálculo de integrales

b.1) En la integral indefinida reconocemos que la derivada de $x^2 - 1$ es $2x$. Por ello, con $u = x^2 - 1$ se obtiene:

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C.$$

El valor absoluto es necesario porque el argumento del logaritmo debe ser positivo. **Conclusión.** $\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C.$

b.2) Integramos por partes dos veces. En la primera, tomamos $u = x^2$ y $dv = e^{-x} dx$, de modo que $du = 2x dx$ y $v = -e^{-x}$:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^1 + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

Para la integral restante usamos de nuevo partes, ahora con $u = x$ y $dv = e^{-x} dx$:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}.$$

Así,

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(1 - \frac{2}{e} \right) = 2 - \frac{5}{e}.$$

Conclusión. El valor exacto de la integral es $2 - \frac{5}{e}.$

A.3. Ángulos, distancias y rectas en el espacio

La recta del enunciado se puede escribir en forma paramétrica como

$$r : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

por lo que pasa por $R = (1, -1, 2)$ y tiene vector director $\vec{u} = (1, 1, 2)$. El plano $\pi : x + y - z = 6$ tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (1, 1, -1)$.

a) Ángulo entre los planos

El plano perpendicular a r tiene como vector normal el director de r , es decir, $\vec{n}_\sigma = \vec{u} = (1, 1, 2)$. El ángulo entre dos planos es el ángulo agudo entre sus vectores normales:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma|}{\|\vec{n}_\pi\| \|\vec{n}_\sigma\|} = \frac{|1 + 1 - 2|}{\sqrt{3} \sqrt{6}} = 0.$$

Conclusión. Los planos son perpendiculares; el ángulo que forman es $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

b) Distancia entre la recta y el plano

Comprobamos primero que son paralelos. La dirección de r es paralela a π cuando es perpendicular a su normal, y

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_\pi = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Como $R = (1, -1, 2)$ no pertenece al plano, la distancia entre r y π es la distancia de ese punto al plano. Para un punto $R(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, la fórmula es

$$d(R, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Aquí el plano es $x + y - z - 6 = 0$, así que

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|1 - 1 - 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Conclusión. La distancia entre la recta r y el plano π es $\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

c) Recta por A perpendicular a r y paralela a π

Una recta que no corte al plano π debe ser paralela a él y, además, no estar contenida en él. Si $\vec{v} = (a, b, c)$ es su vector director, las condiciones son

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_\pi = 0,$$

porque la recta debe ser perpendicular a r y paralela a π , respectivamente. Por tanto,

$$a + b + 2c = 0, \quad a + b - c = 0.$$

Restando las ecuaciones, $3c = 0$, luego $c = 0$ y $a + b = 0$. Podemos tomar $\vec{v} = (1, -1, 0)$. La recta pasa por $A = (1, 0, -1)$, de modo que su forma paramétrica es

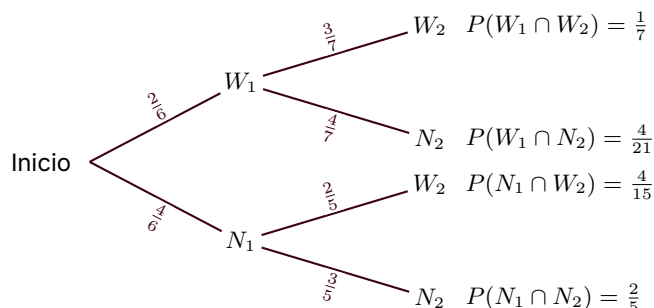
$$\ell : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Su dirección cumple las dos perpendicularidades requeridas. Además, A no pertenece a π porque $1 + 0 - (-1) = 2 \neq 6$, de modo que ℓ es paralela y distinta del plano. **Conclusión.** Una ecuación paramétrica de la recta buscada es la indicada para ℓ .

A.4. Probabilidad en una urna

Llamamos W_1 y N_1 a que la primera bola sea blanca o negra, y W_2 y N_2 a los sucesos análogos en la segunda extracción. Si la primera es blanca, se repone y se añade otra blanca: quedan 3 blancas y 4 negras. Si la primera es negra, no se repone: quedan 2 blancas y 3 negras.

El árbol indica las probabilidades de cada extracción. En el segundo nivel aparecen probabilidades condicionadas por el color de la primera bola; al final de cada camino se muestra su probabilidad conjunta, obtenida multiplicando las probabilidades de las ramas:



a) Probabilidad de extraer bolas de distinto color

Los caminos $W_1 \rightarrow N_2$ y $N_1 \rightarrow W_2$ son incompatibles, así que sumamos sus probabilidades:

$$P(\text{distinto color}) = P(W_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap W_2) = \frac{4}{21} + \frac{4}{15} = \frac{20 + 28}{105} = \frac{16}{35}.$$

Conclusión. La probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es $\frac{16}{35}$.

b) Probabilidad de que la primera fuera negra sabiendo que la segunda es blanca

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada. El suceso $N_1 \cap W_2$ es uno de los caminos del árbol, mientras que W_2 puede darse por dos caminos incompatibles:

$$P(N_1 | W_2) = \frac{P(N_1 \cap W_2)}{P(W_2)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{7} + \frac{4}{15}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{43}{105}} = \frac{28}{43}.$$

Conclusión. Sabiendo que la segunda bola es blanca, la probabilidad de que la primera fuese negra es $\frac{28}{43}$.

B.1. Construcción de sistemas lineales

a) Un sistema en dos incógnitas que admita dos soluciones dadas

Buscamos dos ecuaciones lineales que se cumplan tanto para $(x, y) = (1, 2)$ como para $(0, 0)$. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

En $(1, 2)$, ambos primeros miembros valen 0, y en $(0, 0)$ también; por tanto, los dos pares son soluciones. Como la segunda ecuación es el doble de la primera, el sistema tiene como conjunto de soluciones la recta $y = 2x$, que contiene a los dos puntos indicados. **Conclusión.** Un sistema válido es el anterior; sus soluciones incluyen $(1, 2)$ y $(0, 0)$.

b) Sistema cuyas soluciones dependen de un parámetro

La familia dada cumple $y = x - 2$ y $z = x - 1$, pues las tres coordenadas dependen del mismo parámetro λ . Eliminando el parámetro, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x - z = 1. \end{cases}$$

En efecto, al tomar $x = \lambda$ se recuperan $y = \lambda - 2$ y $z = \lambda - 1$, y no hay otras soluciones porque las dos ecuaciones determinan y y z en función de x . **Conclusión.** El sistema pedido es $x - y = 2$, $x - z = 1$, con soluciones $(x, y, z) = (\lambda, \lambda - 2, \lambda - 1)$.

c) Tres ecuaciones y dos incógnitas con solución única

Para obtener la única solución $(1, 2)$, podemos imponer directamente los valores de las dos incógnitas y añadir una ecuación compatible:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones fijan x e y de forma única, y la tercera se verifica con esos valores. **Conclusión.** El sistema tiene como única solución $x = 1$, $y = 2$.

B.2. Continuidad, extremos y área

La función contiene un valor absoluto, por lo que la escribimos por tramos. Además, al ser combinación de polinomios y $|x|$, su dominio es todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^3 - |x| + 2 = \begin{cases} x^3 + x + 2, & x < 0, \\ x^3 - x + 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Continuidad y derivabilidad en $x = 0$

En cada lado del origen la función es polinómica y, por tanto, continua. En el punto de unión:

$$f(0) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2.$$

Los dos límites laterales coinciden con el valor de la función, así que f es continua en 0.

Para comprobar la derivabilidad calculamos los cocientes incrementales laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^3 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h^2 + 1) = 1, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h^2 - 1) = -1. \end{aligned}$$

Como las derivadas laterales son distintas, la derivada en 0 no existe. **Conclusión.** f es continua en 0, pero no derivable en ese punto.

b) Extremos relativos

En los intervalos donde las expresiones son polinómicas, derivamos cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0, \\ 3x^2 - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Para $x < 0$, $3x^2 + 1 > 0$, así que la función crece hasta llegar a 0. Para $x > 0$, los puntos críticos satisfacen

$$3x^2 - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(el valor negativo no pertenece a este tramo). Si $0 < x < 1/\sqrt{3}$, entonces $f'(x) < 0$; si $x > 1/\sqrt{3}$, $f'(x) > 0$. Por tanto, la función decrece después de 0 hasta $x = 1/\sqrt{3}$ y luego crece. En el origen pasa de creciente a decreciente, aunque no sea derivable allí.

$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 = 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Conclusión. Hay un máximo relativo en $(0, 2)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

c) Área entre la gráfica y el eje de abscisas

En $[-1, 0]$, $f(x) = x^3 + x + 2$ y es creciente, con $f(-1) = 0$, de modo que no cambia de signo. En $[0, 1]$, el mínimo se alcanza en $x = 1/\sqrt{3}$ y vale $2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$; también aquí la gráfica está sobre el eje. Por ello, el área es la integral de f en los dos tramos:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx.$$

Calculamos cada parte mediante sus primitivas:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = \frac{5}{4}, \\ \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área total es $\mathcal{A} = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3$ unidades cuadradas.

B.3. Perpendicular común y distancia entre rectas

Convertimos las dos rectas a forma paramétrica. Para r , igualamos las razones a un parámetro μ ; para s , tomamos $x = t$ y despejamos las otras coordenadas:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = -4 - 3\mu, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t, \\ y = 5, \\ z = 2 - t, \end{cases} \quad \mu, t \in \mathbb{R}.$$

Sus puntos y vectores directores son

$$R = (2, -1, -4), \quad \vec{u} = (1, 1, -3), \quad S = (0, 5, 2), \quad \vec{v} = (1, 0, -1).$$

a) Recta perpendicular común

Un vector perpendicular a ambas direcciones es el producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1).$$

Por tanto, la dirección de la perpendicular común es proporcional a $(1, 2, 1)$. Para localizar un punto de esa recta, buscamos los puntos más próximos de r y s . Sean

$$R_\mu = R + \mu\vec{u}, \quad S_t = S + t\vec{v}.$$

El vector que los une debe ser perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Con $\overrightarrow{R_\mu S_t} = S_t - R_\mu$, primero calculamos

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (-2, 6, 6), \quad S_t - R_\mu = \overrightarrow{RS} + t\vec{v} - \mu\vec{u} = (-2 + t - \mu, 6 - \mu, 6 - t + 3\mu).$$

Las dos condiciones de perpendicularidad dan

$$(S_t - R_\mu) \cdot \vec{u} = 0 \implies 4t - 11\mu - 14 = 0,$$

$$(S_t - R_\mu) \cdot \vec{v} = 0 \implies t - 2\mu = 4.$$

Resolviendo, $\mu = \frac{2}{3}$ y $t = \frac{16}{3}$. El punto de r correspondiente es

$$R_{2/3} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -6 \right).$$

Así, la recta perpendicular común pasa por ese punto y tiene vector director $(1, 2, 1)$:

$$\ell : \begin{cases} x = \frac{8}{3} + \lambda, \\ y = -\frac{1}{3} + 2\lambda, \\ z = -6 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Una ecuación paramétrica de la perpendicular común es la de ℓ .

b) Distancia entre r y s

Las rectas tienen vectores directores no proporcionales y el producto mixto de $\overrightarrow{RS}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es no nulo; por ello son rectas que se cruzan. La distancia entre dos rectas cruzadas es

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Sustituyendo los vectores obtenidos:

$$d(r, s) = \frac{|(-2, 6, 6) \cdot (-1, -2, -1)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - 12 - 6|}{\sqrt{6}} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Como comprobación, la diferencia entre los puntos más próximos es $S_{16/3} - R_{2/3} = \left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8}{3} \right)$, cuyo módulo también es $\frac{8\sqrt{6}}{3}$. **Conclusión.** La distancia entre las rectas es $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

B.4. Distribución binomial y aproximación normal

Sea X el número de días lluviosos entre los 100 días elegidos. Cada día puede considerarse un ensayo con dos resultados, lluvia o no lluvia, y la probabilidad de lluvia es constante, $p = 0,45$. Suponiendo independientes las elecciones de días, X sigue una distribución binomial:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 100, p = 0,45), \quad q = 1 - p = 0,55.$$

a) Probabilidad exacta de que llueva en 40 días

La probabilidad binomial de obtener exactamente k éxitos en n ensayos es

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Para $k = 40$:

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{60}.$$

Conclusión. La expresión exacta pedida es $\binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{60}$.

b) Aproximación mediante una normal

Como n es grande y $np = 45$ y $nq = 55$ son suficientemente grandes, aproximamos la binomial mediante una normal con la misma media y varianza:

$$\mu = np = 100 \cdot 0,45 = 45, \quad \sigma^2 = npq = 100 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 24,75, \quad \sigma = \sqrt{24,75}.$$

Para aproximar una probabilidad puntual de una variable discreta usamos la corrección de continuidad:

$$P(X = 40) \approx P(39,5 < Y < 40,5), \quad Y \sim N(45, 24,75).$$

Estandarizamos los extremos con $Z = (Y - \mu)/\sigma$:

$$z_1 = \frac{39,5 - 45}{\sqrt{24,75}} \approx -1,11, \quad z_2 = \frac{40,5 - 45}{\sqrt{24,75}} \approx -0,90.$$

La tabla da $\Phi(1,11) = 0,8665$ y $\Phi(0,90) = 0,8159$. Por simetría,

$$P(39,5 < Y < 40,5) \approx \Phi(-0,90) - \Phi(-1,11) = (1 - 0,8159) - (1 - 0,8665) = 0,0506.$$

Conclusión. La aproximación normal de la probabilidad pedida es 0,0506 (aproximadamente un 5,06 %).