



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) **Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) **Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - f) **En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad \text{para } x \neq -1.$$

- a) **Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . (1.5 puntos)**
- b) **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (1 punto)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - a)e^x$.

- a) **Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$. (1.25 puntos)**
- b) **Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f . (1.25 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

- a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f , la gráfica de g , la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas). **(1 punto)**
- b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen

$$AX = XA, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de

ecuaciones dado por $X^t A = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m .

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x=0$ y $\pi_2 \equiv y=0$.

- a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 . **(1.25 puntos)**
- b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2 . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

- a) Halla el área de dicho triángulo. **(1.25 puntos)**
- b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad \text{para } x \neq -1.$$

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.5 puntos)**
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1 punto)**

a)

Asíntotas verticales: $x = a$.

Siendo a el valor excluido del dominio. La asíntota es $x = -1$

Comprobemos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 3 + 4}{0} = \frac{2}{0} = \infty$$

Asíntotas horizontales: $y = b$. Siendo $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{Calculemos } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{2x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x + 4) \cdot 2 - x(2x + 2)}{(2x + 2) \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} + 6x + 8 - \cancel{2x^2} - 2x}{4x + 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 8}{4x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) Necesitamos la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 3)(2x + 2) - (x^2 + 3x + 4)(2)}{(2x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 4x + 6x + 6 - (2x^2 + 6x + 8)}{(2x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 4x + 6x + 6 - 2x^2 - 6x - 8}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x+2)^2}$$

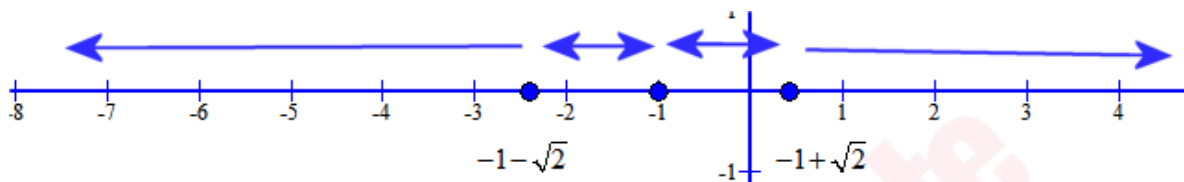
Iguamos a cero y...

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x+2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{4} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{4} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Tendremos 3 puntos a considerar para el cambio de signo de la derivada: -1 ; $-1 - \sqrt{2}$ y $-1 + \sqrt{2}$.

Por lo tanto la recta real se divide en 4 zonas:



Estudiemos el signo en cada zona:

En la semirrecta $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ tomamos el valor $x = -4 \rightarrow$

$$f'(-4) = \frac{2(-4)^2 + 4(-4) - 2}{(2(-4) + 2)^2} = \frac{32 - 16 - 2}{+} > 0. \text{ La función crece.}$$

En el intervalo $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ tomamos el valor $x = -2 \rightarrow$

$$f'(-2) = \frac{2(-2)^2 + 4(-2) - 2}{(2(-2) + 2)^2} = \frac{8 - 8 - 2}{+} < 0. \text{ La función decrece.}$$

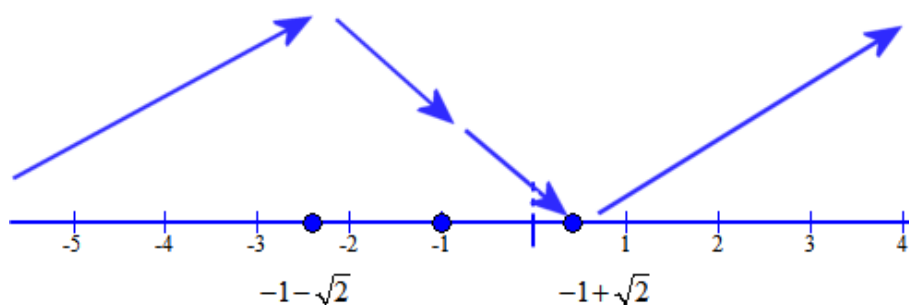
En el intervalo $(-1, -1 + \sqrt{2})$ tomamos el valor $x = 0 \rightarrow f'(0) = \frac{2(0)^2 + 4(0) - 2}{(2(0) + 2)^2} = \frac{-2}{+} < 0. \text{ La}$

función decrece.

En la semirrecta $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ tomamos el valor $x = 4 \rightarrow$

$$f'(4) = \frac{2(4)^2 + 4(4) - 2}{(2(4) + 2)^2} = \frac{32 + 16 - 2}{+} > 0. \text{ La función crece}$$

El esquema es:



La función crece en $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ y decrece en $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$.

- a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$. **(1.25 puntos)**
 b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**

- a) La derivada de la función es $f(x) = (x-a)e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (1+x-a)e^x$

La igualamos a cero para averiguar sus puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1+x-a)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x-a=0 \Rightarrow x=a-1 \\ e^x=0; \text{ No es posible} \end{cases}$$

Como el punto crítico debe ser $x=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

- b) Si $a=1$ entonces la función es $f(x) = (x-1)e^x$ y su derivada $f'(x) = (1+x-1)e^x = xe^x$

La derivada segunda será: $f'(x) = xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

Si igualamos a cero la segunda derivada

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (1+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x=0 \Rightarrow x=-1 \\ e^x=0; \text{ No es posible} \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada segunda antes de $x=-1$ y después de $x=-1$.

En $(-\infty, -1)$ tomamos el valor $x=-2 \rightarrow f''(-2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} < 0$

En $(-1, +\infty)$ tomamos el valor $x=0 \rightarrow f''(0) = (1+0)e^0 = 1 > 0$

La función presenta un punto de inflexión en $x=-1$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Calculemos la integral indefinida pedida:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt \end{array} \right\} = \int \frac{1+t}{1-t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1+t}{t(1-t)} dt =$$

= { Integración por descomposición en fracciones simples }

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow \frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A(1-t) + Bt}{t(1-t)} \Rightarrow 1+t = A(1-t) + Bt$$

$$\text{Tomando } t=1 \Rightarrow 1+1 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B=2$$

$$\text{Tomando } t=0 \Rightarrow 1+0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \Rightarrow A=1$$

Nuestra integral se descompone en la suma de dos integrales más sencillas:

$$\int \frac{1+t}{t(1-t)} dt = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{2}{1-t} dt = \ln t - 2 \ln(1-t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= \ln e^x - 2 \ln |1 - e^x| = \boxed{x - 2 \ln |1 - e^x| + C}$$

La primitiva es $F(x) = x - 2 \ln |1 - e^x| + C$. Como nos piden además que pase por el punto $(1,1)$, se debe cumplir que $F(1) = 1 \Rightarrow F(1) = 1 - 2 \ln |1 - e| + C = 1 \Rightarrow -2 \ln |1 - e| + C = 0 \Rightarrow C = 2 \ln |1 - e|$

La primitiva pedida es $F(x) = x - 2 \ln |1 - e^x| + 2 \ln |1 - e|$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

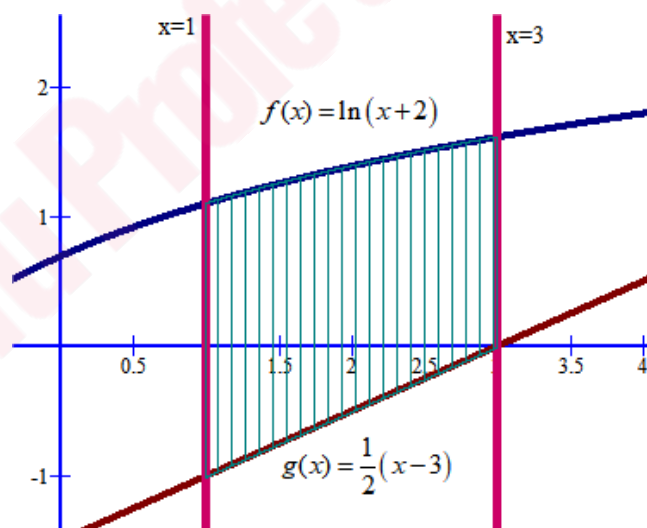
- a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f , la gráfica de g , la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas). **(1 punto)**
 b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

- a) Hacemos una tabla de valores para cada función.

x	$f(x) = \ln(x+2)$
-2	$\ln 0 = -\infty$; No existe pero es una asíntota
-1	$\ln(1) = 0$
0	$\ln 2 = 0,69$
4	$\ln 6 = 1,79$

x	$g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$
1	-1
2	$-\frac{1}{2}$
3	0

El recinto será:



- b) El área del recinto es la integral definida de la diferencia de las funciones entre 1 y 3. Calculemos primero la integral definida de la función f .

$$\int \ln(x+2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln(x+2) \Rightarrow du = \frac{1}{x+2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x+2) - \int x \frac{1}{x+2} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= x \cdot \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \cdot \ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \\
 &= x \cdot \ln(x+2) - \int \frac{x+2}{x+2} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = x \cdot \ln(x+2) - \int dx + 2 \int \frac{1}{x+2} dx = \\
 &= x \cdot \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2)
 \end{aligned}$$

El área será:

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3) dx &= \int_1^3 \ln(x+2) dx - \frac{1}{2} \int_1^3 x-3 dx = \\
 &= \left[x \cdot \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) \right]_1^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^3 = \\
 &= (3 \ln(3+2) - 3 + 2 \ln(3+2)) - (1 \ln(1+2) - 1 + 2 \ln(1+2)) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3^2}{2} - 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) \right] = \\
 &= 5 \ln 5 - 3 - 3 \ln 3 + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} + 3 \right) = 5 \ln 5 - 2 - 3 \ln 3 + 1 = -1 + 5 \ln 5 - 3 \ln 3 = \boxed{3,75 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

BLOQUE B**EJERCICIO 5 (2,5 puntos)**

Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen

$$AX = XA, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} AX = XA \\ a + d = 1 \Rightarrow a = 1 - d \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ 1-d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -1+d \\ d & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -c = b \\ -d = -1+d \\ 1-d = d \\ b = -c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -c \\ 1 = 2d \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Las matrices son $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y determinante vale 1

$$|X| = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Las matrices son $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de

ecuaciones dado por $X^t A = B^t$, donde X^t , B^t denotan las traspuestas. Discútelos según los distintos valores de m .

$$X^t A = B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} ((2-m)x + y + mz &= 2m^2-1) \\ (x + my + z &= m) \\ ((2m-1)x + y + z &= 1) \end{aligned} \right\}$$

Discutamos el sistema. Para ello considero la matriz de coeficientes:

$$B = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$|B| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-m)m + 2m - 1 + m - [m^2(2m-1) + 1 + 2 - m] =$$

$$= 2m - m^2 + 2m - 1 + m - 2m^3 + m^2 - 3 + m = -2m^3 + 6m - 4$$

$$\text{Igualamos a cero y } -2m^3 + 6m - 4 = 0 \Rightarrow 1 \left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 6 & -4 \\ & -2 & -2 & 4 \\ & -2 & -2 & 4 \end{array} \right| \Rightarrow m = 1 \text{ es raíz}$$

Y resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$-2m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-4} = \frac{2 \pm 6}{-4} = \begin{cases} m = \frac{2+6}{-4} = -2 \\ m = \frac{2-6}{-4} = 1 \end{cases}$$

Distinguiremos 3 casos diferentes:

CASO 1. $m \neq 1$; $m \neq -2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene solución única. Existe una única matriz X que cumpla la ecuación $X^t A = B^t$.

CASO 2. $m = 1$

Para este valor el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + z = 1$$

Se observa que las tres ecuaciones son iguales. Este sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m = -2$

Para este valor el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y - 2z = 7 \\ x - 2y + z = -2 \\ -5x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + y - 2z = 7 \\ -5x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 4 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -4x + 8y - 4z = 8 \\ 4x + y - 2z = 7 \\ \hline 9y - 6z = 15 \end{array} \right\} \text{ y también } \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x - 10y + 5z = -10 \\ -5x + y + z = 1 \\ \hline -9y + 6z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -2 \\ 9y - 6z = 15 \\ -9y + 6z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ 9y - 6z = 15 \\ -9y + 6z = -9 \\ \hline 0 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -2 \\ 9y - 6z = 15 \\ 0 = 6 \end{array} \right\}$$

Este sistema no tiene solución.

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x=0$ y $\pi_2 \equiv y=0$.

- a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 . **(1.25 puntos)**
 b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2 . **(1.25 puntos)**

- a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right\} \text{Un punto de la recta } r \text{ tiene coordenadas } P_r(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda)$$

Este punto si equidista de los planos debe cumplir:

$$\begin{aligned} \text{distancia}(P_r, \pi_1) &= \text{distancia}(P_r, \pi_2) \\ \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{1}} &= \frac{|2 + 3\lambda|}{\sqrt{1}} \\ |2 - \lambda| &= |2 + 3\lambda| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - \lambda = 2 + 3\lambda \Rightarrow 0 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \\ 2 - \lambda = -(2 + 3\lambda) \Rightarrow 2 - \lambda = -2 - 3\lambda \Rightarrow 2\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 tienen coordenadas

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda) \\ \lambda = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_r(2, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda) \\ \lambda = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow P_r(4, -4, -1)$$

- b) Llamemos s a la recta definida por los planos π_1 y π_2 . Obtengamos de su ecuación el vector director:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x=0 \\ \pi_2 \equiv y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = (0, 0, 1)$$

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 3, 1)$$

Para que las rectas sean coincidentes o paralelas los vectores directores deben ser proporcionales, y estos no lo son. Por lo que solo cabe la posibilidad de que se corten o crucen.

Tomemos un tercer vector que vaya de un punto de la recta s a otro de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow P_r(2,2,1) \\ x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_s P_r} = (2,2,1) - (0,0,0) = (2,2,1)$$

Veamos si son linealmente dependientes o independientes los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - (0 + 0 + 6) = -8 \neq 0$$

Por lo que las rectas se cruzan.

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).

a) Halla el área de dicho triángulo. **(1.25 puntos)**

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A. **(1.25 puntos)**

a) Las coordenadas de los vectores que forman el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 0) = (0, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del vector que resulta del producto vectorial de ambos vectores.

Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j - k - 2i = -3i - 2j - k = (-3, -2, -1)$$

Su módulo es

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$$

b) El coseno del ángulo en el vértice A es el coseno del ángulo que existe entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$(0, -1, 2) \cdot (-1, 1, 1) = \sqrt{1+4} \sqrt{1+1+1} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-1+2}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = 0,2581$$