

Modelo 2 de 2004

Optimización, áreas, sistemas lineales y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

Sea $x > 0$ el lado de la base cuadrada y $h > 0$ la altura. El volumen fija $x^2 h = 80$, luego $h = 80/x^2$. El coste suma las áreas de tapa y base, a sus respectivos precios, y de las cuatro caras laterales:

$$C(x) = x^2 + 1.5x^2 + 4xh = \frac{5}{2}x^2 + \frac{320}{x}.$$

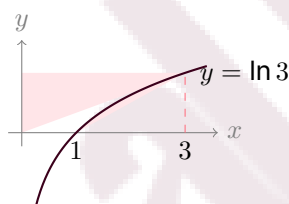
Para minimizarlo en $x > 0$, derivamos:

$$C'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \iff 5x^3 = 320 \iff x = 4.$$

Además, $C''(x) = 5 + 640/x^3 > 0$, así que es un mínimo. La altura es $h = 80/16 = 5$. Las dimensiones de coste mínimo son $\boxed{4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}}$. **Opción A - Ejercicio 2**

La región sombreada tiene altura $\ln 3$ sobre el eje x entre $x = 0$ y $x = 1$, y entre $y = \ln x$ y $y = \ln 3$ para $1 \leq x \leq 3$. Así,

$$S = \int_0^1 \ln 3 \, dx + \int_1^3 (\ln 3 - \ln x) \, dx = 3 \ln 3 - [x \ln x - x]_1^3 = \boxed{2}.$$



Opción A - Ejercicio 3

Para que haya al menos dos soluciones, el sistema debe ser compatible indeterminado: la tercera fila de coeficientes y su término independiente han de ser la misma combinación lineal de las dos primeras. Si la tercera fila es $pR_1 + qR_2$, de la primera y tercera coordenadas resulta

$$p - q = a, \quad p + 2q = 1.$$

La compatibilidad con los términos independientes exige $p - q = 4$. De aquí $p = 3$, $q = -1$, y entonces

$$\boxed{a = 4, \quad b = 3 \cdot 3 - 1 = 8}.$$

En efecto, la tercera ecuación es tres veces la primera menos la segunda, por lo que quedan dos ecuaciones independientes con tres incógnitas y hay infinitas soluciones. **Opción A - Ejercicio 4**

Los planos que contienen a C dan $y + z = 1$ e $y - 3z + 3 = 0$. Al resolverlas, $y = 0$, $z = 1$, así que $C = (x, 0, 1)$. Como el triángulo es rectángulo en C , $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$:

$$(A - C) \cdot (B - C) = (2 - x, 0, 0) \cdot (-x, -3, -1) = -x(2 - x) = 0.$$

Las raíces son $x = 0$ y $x = 2$. La segunda daría $C = A$ y un triángulo degenerado, así que $C = (0, 0, 1)$. Los catetos miden $|CA| = 2$ y $|CB| = \sqrt{10}$; por tanto,

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} |CA| |CB| = \sqrt{10}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La gráfica de f' muestra que $f'(1) = 1$. Como $f(1) = 3$, la recta tangente en $x = 1$ es

$$y - 3 = 1(x - 1) \implies \boxed{y = x + 2}.$$

Además, $f'(x) > 0$ en el interior de $[0, 4]$ salvo en $x = 3$, donde vale cero. Por ello f es creciente en todo el intervalo y alcanza su máximo absoluto en el extremo $x = 4$. La gráfica de f' crece en $(0, 1)$, decrece en $(1, 3)$ y vuelve a crecer en $(3, 4)$; como f'' es la pendiente de esa gráfica, f es convexa en $(0, 1)$ y $(3, 4)$, y cóncava en $(1, 3)$. Cambia de concavidad en $x = 1$ y $x = 3$. **Opción B - Ejercicio 2**

Las tres curvas se cortan en los puntos relevantes $x = 0, 2, 4$: $y = x^2$ cruza a $y = 2x$ en $0, 2$, y $y = x^2/2$ cruza a la recta en $0, 4$. El contorno cerrado usa la parábola superior en $[0, 2]$ y la recta en $[2, 4]$; la curva inferior es $y = x^2/2$. Separamos el área donde cambia la frontera superior:

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \boxed{4}.$$

Opción B - Ejercicio 3

(a) El determinante de A es $-3(a+5)$. Para que el rango sea 2 debe anularse, por lo que $a = -5$. El rango no baja de 2, pues, por ejemplo, el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale $-10 \neq 0$. Por tanto, $\boxed{a = -5}$.

(b) Con ese valor, la tercera fila es $-R_1 + 2R_2$, y el término independiente también cumple $-1 = -1 + 2 \cdot 0$; la tercera ecuación es dependiente. Tomando $z = t$, las dos primeras ecuaciones dan

$$3x - 2y + t = 1, \quad x - 4y - 2t = 0.$$

De la segunda, $x = 4y + 2t$. Sustituyendo en la primera se obtiene $10y = 1 - 7t$, y así

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{5} - \frac{8}{5}t, \frac{1}{10} - \frac{7}{10}t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Las rectas tienen vectores directores $d_r = (0, 0, 1)$ y $d_s = (1, 1, 0)$. Sean $R = (1, 1, \alpha) \in r$ y $S = (\beta, \beta - 1, -1) \in s$. Para que el segmento RS sea perpendicular a ambas rectas, su vector debe cumplir

$$(S - R) \cdot d_r = 0 \implies -1 - \alpha = 0, \quad (S - R) \cdot d_s = 0 \implies 2\beta - 3 = 0.$$

Así, $R = (1, 1, -1)$ y $S = (3/2, 1/2, -1)$. La perpendicular común pasa por R y tiene dirección $S - R = (1/2, -1/2, 0)$, proporcional a $(1, -1, 0)$. En forma paramétrica:

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + t(1, -1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$