

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones $S: \begin{cases} 2x + \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)y + z = 1 \\ x + 2y + \alpha^2 z = 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

- La solución del sistema S cuando $\alpha = 0$. (3 puntos)
- Todas las soluciones del sistema S cuando $\alpha = -1$. (4 puntos)
- El valor de α para el que el sistema S es incompatible. (3 puntos)

Solución:

Los apartados a) y b) podemos resolverlos directamente sustituyendo en el sistema S el valor de α por su valor, pero para resolver el apartado c) hay que estudiar el sistema. Empezamos estudiando el sistema.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha^2 & 5 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \end{array} \right)$.

Como A es 3x3, su máximo rango es 3. Como A' es 3x4, su máximo rango también es 3. Por lo que empezamos estudiando la matriz A.

Estudiemos el determinante de orden 3 de A,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{vmatrix} F_3 - F_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + (1-\alpha)\alpha^2 - 4 = 2\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^3 - 4 = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4$$

Resolvamos la ecuación: $-\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 = 0$, por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & & -2 & 4 & \\ \hline & -1 & 2 & 0 & \\ 2 & & -2 & & \\ \hline & -1 & 0 & & \end{array}$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$\alpha = -1 \text{ y } \alpha = 2$$

Es decir, que $|A| = 0$ para $\alpha = -1$ y $\alpha = 2$

Por lo tanto, sobre el sistema S podemos afirmar:

Para $\alpha \neq -1, 2$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas}$, S es sistema compatible y determinado.

Para $\alpha = -1$

La matriz ampliada es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$, ya sabemos que $|A| = 0$. Obtengamos los rangos de A y A'

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$

Calculemos el rango de A', al menor no nulo anterior le orlamos la cuarta columna y la tercera fila de A',

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\text{como } F_2 = F_3) = 0, \text{ por lo tanto } \text{rang}(A') = 2$$

Luego, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas}$, S es sistema compatible indeterminado.

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas que nos indica el menor no nulo de orden 2 anterior,

es decir:
$$\begin{cases} 2x = 5 - z \\ x + 2y = 1 - z \end{cases}$$

De la primera ecuación $x = \frac{5 - z}{2}$

Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación:

$$\frac{5 - z}{2} + 2y = 1 - z; \quad 5 - z + 4y = 2 - 2z; \quad 4y = -3 - z; \quad y = \frac{-3 - z}{4}$$

Luego la solución del sistema S será:
$$\begin{cases} x = \frac{5 - \lambda}{2} \\ y = \frac{-3 - \lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $\alpha = 2$

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, ya sabemos que $|A| = 0$. Obtengamos los rangos de A y A'

Calculemos el rango de A , como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$

Calculemos el rango de A' , procediendo como en el apartado anterior,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 10 + 5 - 4 = 9 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A') = 3$$

Como $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A')$, el sistema S es incompatible.

Respondamos a cada uno de los apartados del problema.

a) Para $\alpha = 0$, ($\neq -1$ y 2) el sistema S es compatible determinado.

La matriz ampliada es, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{5 - 2}{-4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Resolviendo por Cramer,

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2 + 10 - 5 - 4}{-4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Finalmente, para $\alpha = 0$ la solución del sistema S es: $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$, $z = -\frac{3}{4}$

b) Para $\alpha = -1$, como hemos obtenido anteriormente, la solución del sistema S es:
$$\begin{cases} x = \frac{5-\lambda}{2} \\ y = \frac{-3-\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) El sistema S es incompatible, como hemos obtenido anteriormente, para $\alpha = 2$.

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r_1: \begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=2-\alpha \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x=-1 \\ y=1+\beta \\ z=-1-2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Calcular **razonadamente**:

- Las coordenadas del punto de corte de r_1 y r_2 . (3 puntos)
- La ecuación del plano que contiene esas dos rectas. (4 puntos)
- La distancia del punto $(0, 0, 1)$ a la recta r_2 . (3 puntos)

Solución:

a) Punto de corte entre las rectas r_1 y r_2 :

$$\text{Hay que resolver el sistema: } \begin{cases} 1+2\alpha=-1 \\ \alpha=1+\beta \\ 2-\alpha=-1-2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha=-2 \\ \alpha-\beta=1 \\ -\alpha+2\beta=-3 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $\alpha = \frac{-2}{2} = -1$, sustituyendo en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -1-\beta=1 \\ 1+2\beta=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1-1=\beta \\ 2\beta=-3-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=-2 \\ 2\beta=-4 \end{cases} \rightarrow \beta=-2$$

Como hemos obtenido el mismo valor de β , el sistema tiene como solución: $\alpha = -1$ y $\beta = -2$

Sustituyendo el valor de α en la recta r_1 o el valor de β en la recta r_2 obtendremos el punto de corte entre las dos rectas.

$$\text{Para } \alpha = -1, \begin{cases} x=1+2(-1)=-1 \\ y=-1 \\ z=2-(-1)=3 \end{cases} . \text{ El punto de corte entre } r_1 \text{ y } r_2 \text{ es } P(-1, -1, 3)$$

b) El plano que contiene a las dos rectas tiene como punto el obtenido anteriormente, P , y como vectores directores los de las rectas. Es decir,

$$\text{Elementos del plano pedido: } \begin{cases} \text{Punto } P(-1, -1, 3) \\ \vec{v}_{r_1} = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_{r_2} = (0, 1, -2) \end{cases}, \text{ la ecuación general del plano la obtenemos mediante el}$$

siguiente cálculo:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)(-2+1) - (y+1)(-4) + (z-3)2 = 0$$

$$(x+1)(-1) + 4(y+1) + 2(z-3) = 0$$

$$-x-1+4y+4+2z-6=0$$

$$-x+4y+2z-3=0$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano pedido es: $-x+4y+2z-3=0$

c) Llamando $Q(0,0,1)$, debemos calcular $d(Q, r_2)$

Siendo P el punto de la recta r_2 obtenido en el apartado a) y $\vec{v}$ el vector director de la recta r_2 la distancia pedida podemos calcularla mediante la siguiente fórmula: $d(Q, r_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$, efectuemos los cálculos necesarios.

$$\overrightarrow{PQ} = (0,0,1) - (-1,-1,3) = (1,1,-2)$$

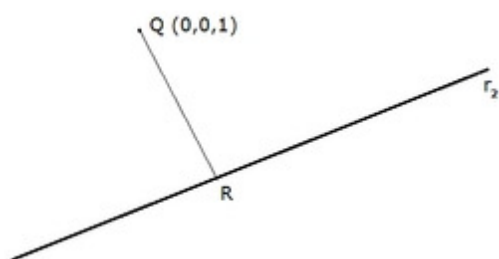
$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + \vec{k} = (0,2,1)$$

$$|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}| = |(0,2,1)| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = |(0,1,-2)| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Finalmente, } d(Q, r_2) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Otra forma de obtener esta distancia, si no nos acordásemos de la fórmula, sería obtener un punto R de la recta r_2 de forma que el vector $\overrightarrow{QR}$ sea perpendicular a r_2 , así $d(Q, r_2) = d(Q, R)$.



El punto R de la recta r_2 será $(-1, 1 + \beta, -1 - 2\beta)$

$$\overrightarrow{QR} = (-1, 1 + \beta, -1 - 2\beta) - (0, 0, 1) = (-1, 1 + \beta, -2 - 2\beta)$$

$\overrightarrow{QR} \perp r_2 \rightarrow \overrightarrow{QR} \perp \vec{v}_{r_2}$, por lo que debe cumplirse:

$$(-1, 1 + \beta, -2 - 2\beta) \cdot (0, 1, -2) = 0$$

$$1 + \beta + 4 + 4\beta = 0$$

$$5 + 5\beta = 0; \quad \beta = -1$$

Por lo tanto $R(-1, 0, 1)$

$$\text{y } d(Q, R) = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$\text{Luego } d(Q, r_2) = 1$$

PROBLEMA A.3. Con el símbolo $\ln x$ se representa el logaritmo de un número positivo x cuando la base del logaritmo es el número e . Sea f la función que para un número positivo x está definida por la igualdad

$$f(x) = 4x \ln x.$$

Obtener **razonadamente**:

- El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo. (4 puntos)
- La ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x \ln x$ en el punto $(1,0)$. (3 puntos)
- El área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4x \ln x$. (3 puntos)

Solución:

a) *Mínimo relativo de $f(x)$*

Primero obtengamos el dominio de $f(x)$.

Como $\ln x$ sólo puede calcularse para valores de $x > 0$, $\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 4 \ln x + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4 \ln x + 4$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4 \ln x + 4 = 0$$

$$4 \ln x = -4$$

$$\ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Calculemos la segunda derivada para determinar si es máximo o mínimo,

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{e} \rightarrow f''(x) = \frac{4}{1/e} = 4e > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

La función $f(x)$ alcanza el mínimo relativo en $x = \frac{1}{e}$.

b) *Recta tangente a $y = 4x \ln x$ en $(1, 0)$*

Para $x = 1$, $y = 4 \cdot 1 \cdot \ln 1 = 0$, el punto $(1, 0)$ es de la curva.

De la recta pedida, un punto es $(1, 0)$ y la pendiente será $y'_{x=1}$.

$$y' = 4 \ln x + 4 \text{ (según hemos obtenido en el apartado anterior al calcular } f'(x) \text{)}$$

$$y'_{x=1} = 4 \ln 1 + 4 = 4$$

Por lo tanto, la recta tangente será:

$$y - 0 = 4(x - 1); \quad y = 4x - 4$$

c) *Área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4x \ln x$.*

Para obtener esta área es conveniente realizar la representación gráfica del problema.

En primer lugar representemos la curva $y = 4x \ln x$,

Por cálculos de los apartados anteriores, de esta curva conocemos:

$$\text{Dom } y = (0, +\infty)$$

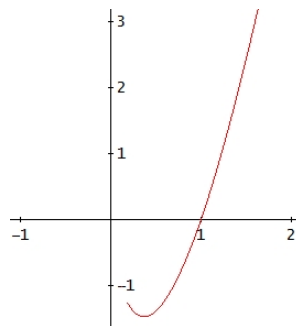
$$\text{Su único extremo es el mínimo relativo en } x = \frac{1}{e} \rightarrow y = 4 \cdot \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-4}{e} \rightarrow \left(\frac{1}{e}, \frac{-4}{e}\right) \approx (0.368, -1.472)$$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$x = 0$, no es del dominio

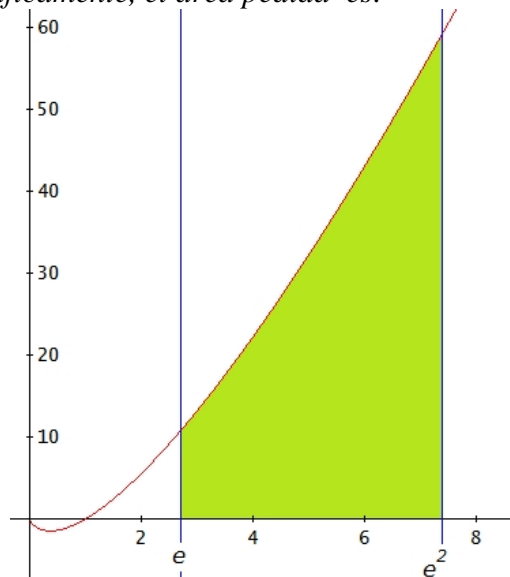
$$y = 0, \quad 4x \ln x = 0 \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } y \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases} \rightarrow (1, 0)$$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Para obtener la región del plano de la que debemos calcular su área nos falta por representar las rectas $x = e$ y $x = e^2$. Tanto e como e^2 son mayores que 1, por lo que no necesitamos realizar más cálculos sobre la curva.

Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_e^{e^2} (4x \ln x) dx$$

Calculemos en primer lugar la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int (4x \ln x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = 4x dx \rightarrow v = 2x^2 \end{array} \right\} = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{1}{x} dx = \\ &= 2x^2 \ln x - \int 2x dx = 2x^2 \ln x - x^2 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} (4x \ln x) dx &= [2x^2 \ln x - x^2]_e^{e^2} = [2(e^2)^2 \ln e^2 - (e^2)^2] - [2e^2 \ln e - e^2] = \\ &= (2e^4 \cdot 2 \ln e - e^4) - (2e^2 \cdot 1 - e^2) = 4e^4 - e^4 - (e^2) = 3e^4 - e^2 \approx 156'405394 \end{aligned}$$

Finalmente, el área pedida mide: $(3e^4 - e^2) \text{ u.a.} \approx 156'405394 \text{ u.a.}$

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente:

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (4 puntos).

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$. (3 puntos).

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo además que el determinante de A es positivo. (3 puntos).

Solución:

a) Veamos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 3 = 0, \text{ luego } \nexists A^{-1}$$

La ecuación matricial del enunciado da lugar al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ x - y - z = -1 \end{cases}, \text{ estudiemos este sistema. Su matriz ampliada es } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Estudiemos el rango de A .

Del cálculo inicial sabemos que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{rang}(A) = 2$

Estudiemos el rango de A' , como $\text{rang}(A) = 2 \rightarrow \text{rang}(A') \geq 2$. Ampliamos el menor de orden 2 no nulo de A' , que es el obtenido anteriormente en A , con la cuarta columna y tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 + 3 = 0 \quad \text{Por lo tanto } \text{rang}(A') = 2$$

Lo obtenido es: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Resolvemos el sistema usando las ecuaciones (1° y 2°) e incógnitas (x, y) que han proporcionado este rango.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ x + y = 3 - 3z \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x obtenido en la 1° ecuación en la 2° :

$$1 - 2z + y = 3 - 3z; \quad y = 3 - 1 - 3z + 2z = 2 - z$$

Las soluciones del sistema son: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Finalmente, las soluciones de la ecuación matricial inicial serán: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda \\ 2 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) B es una matriz 2×2 / $\exists B^{-1}$ y $B^2 = B$. Debemos obtener $|B|$ (determinante de B).

Como $B^2 = B$

$|B^2| = |B|$, por la propiedad de los determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, $|B^2| = |B| \cdot |B| = |B|^2$

$$|B|^2 = |B|; \quad |B|^2 - |B| = 0; \quad |B|(|B| - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} |B| = 0 \\ |B| - 1 = 0 \rightarrow |B| = 1 \end{cases}$$

Ahora bien, como $\exists B^{-1} \rightarrow |B| \neq 0$

Por lo que concluimos que $|B| = 1$

c) A es una matriz 4×4 / $|A| > 0$ y $A^2 - 9I = \mathbf{0}$ (siendo I la matriz identidad y $\mathbf{0}$ la matriz nula ambas de orden 4). Debemos obtener $|A|$.

De $A^2 - 9I = \mathbf{0}$; $A^2 = \mathbf{0} + 9I$; $A^2 = 9I$

$|A^2| = |9I|$, por la propiedad de los determinantes aplicada en el apartado anterior:

$|A|^2 = |9I|$, como I es 4×4 entonces $|9I| = 9^4$, luego

$$|A|^2 = 9^4 \rightarrow |A| = \pm \sqrt{9^4} = \pm 9^2 = \pm 81$$

Pero como sabemos que $|A| > 0$ concluimos que $|A| = 81$.

Tu Prof te al Rescate

PROBLEMA B.2. Se da la recta r de ecuación $r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$ y el plano π de ecuación $\pi: 2x+y+nz=p$, donde n y p son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente**:

- Todos los valores de n para los que la intersección de la recta r y el plano π es un punto. (4 puntos).
- El valor de n y el valor de p para los que la recta r está contenida en el plano π . (3 puntos).
- El valor de n y todos los valores de p para los que la recta r no corta al plano π . (3 puntos).

Solución:

a) ¿ $n? / r \cap \pi$ sea un punto.

Para que el corte entre la recta r y el plano π sea un punto, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener solución única.

El sistema que debemos considerar es: $\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \\ 2x+y+nz=p \end{cases}$, como es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

para que tenga solución única debe cumplirse que $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 5n - 2 + 4 + 20 + 1 + 2n = 7n + 23$$

$$7n + 23 \neq 0; \quad 7n \neq -23; \quad n \neq \frac{-23}{7}$$

Luego, $r \cap \pi$ es un punto para $n \neq \frac{-23}{7}$

b) ¿ n y $p? / r \subset \pi$

Para que esto ocurra, el corte entre r y π debe ser una línea recta (la r) y para ello el sistema anterior debe ser compatible indeterminado con $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2$. (Siendo A la matriz de coeficientes del sistema anterior y A' la matriz ampliada)

De lo estudiado en el apartado anterior, cuando $n = \frac{-23}{7} \rightarrow |A| = 0$ y como el siguiente menor de orden 2 de A ,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0, \text{ podemos afirmar que para ese valor de } n \text{ el rango de } A \text{ es } 2.$$

Para que el rango de A' sea 2, debe cumplirse que el menor de orden tres obtenido de A' orlando al menor de orden 2 no nulo anterior la tercera fila y la cuarta columna sea nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} = 0; \quad 5p + 1 - 10 + 2p = 0; \quad 7p - 9 = 0; \quad p = \frac{9}{7}$$

Por lo que la recta r está contenida en el plano π cuando $n = \frac{-23}{7}$ y $p = \frac{9}{7}$.

c) Para que la recta r no corte al plano π , el sistema planteado en el apartado a) debe ser incompatible.

$$\text{La matriz ampliada de aquel sistema es: } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & n & p \end{array} \right)$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$$

Por lo tanto, para que el sistema sea incompatible debe ser $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}(A') = 3$.

De lo estudiado en el apartado anterior, $\text{rang}(A) = 2$ cuando $n = \frac{-23}{7}$.

Para que $\text{rang}(A') = 3$, debe ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} \neq 0$ y según lo calculado en b) esto se cumple para $p \neq \frac{9}{7}$.

Es decir, la recta r no corta al plano π cuando $n = \frac{-23}{7}$ y $p \neq \frac{9}{7}$.

Tu Profecia al Rescate

PROBLEMA B.3. Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo T de vértices $A = (0, 12)$, $B = (-x, x^2)$ y $C = (x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$.

Obtener **razonadamente**:

- El área del triángulo T en función de la abscisa x del vértice C . (2 puntos).
- Las coordenadas de los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima. (3 puntos).

Para completar el escudo se añade al triángulo T de área máxima la superficie S limitada entre la recta $y = 4$ y el arco de parábola $y = x^2$, cuando $-2 \leq x \leq 2$.

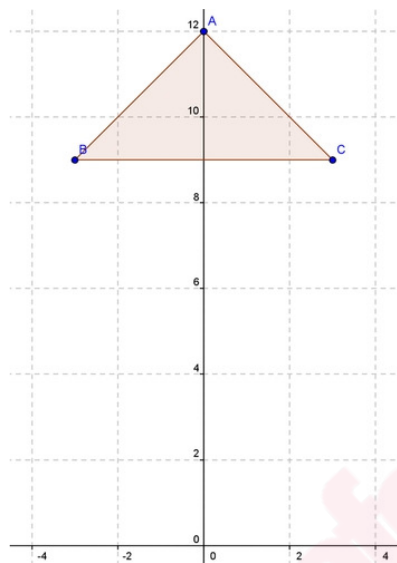
Obtener **razonadamente**:

- El área de la superficie S . (3 puntos).
- El área total del escudo. (2 puntos).

Solución:

a) El triángulo T tiene de vértices los puntos $A(0, 12)$, $B(-x, x^2)$ y $C(x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$.

Gráficamente será:



El triángulo T tiene de base $2x$ y de altura $12 - x^2$.
Luego su área será,

$$A_T(x) = \frac{2x(12 - x^2)}{2} = x(12 - x^2) = 12x - x^3$$

Por definición de los vértices B y C del triángulo T y como debe cumplirse que $x^2 < 12$, $\text{Dom } A_T(x) = (0, \sqrt{12})$

Es decir: $A_T(x) = 12x - x^3$, $\text{Dom } A_T(x) = (0, \sqrt{12})$

b) El área del triángulo T debe ser máxima.

$$A_T'(x) = 12 - 3x^2$$

$$12 - 3x^2 = 0$$

$$12 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{12}{3} = 4$$

$$x = \pm 2$$

Pero como $\text{Dom } A_T(x) = (0, \sqrt{12})$, $x = 2$. Determinemos qué tipo de extremo es.

$$A_T''(x) = -6x \rightarrow A_T''(2) = -6 \cdot 2 = -12 < 0, \text{ luego en } x = 2 \text{ hay un máximo relativo.}$$

Estudiemos la monotonía de $A_T(x)$ para comprobar que es el máximo absoluto.

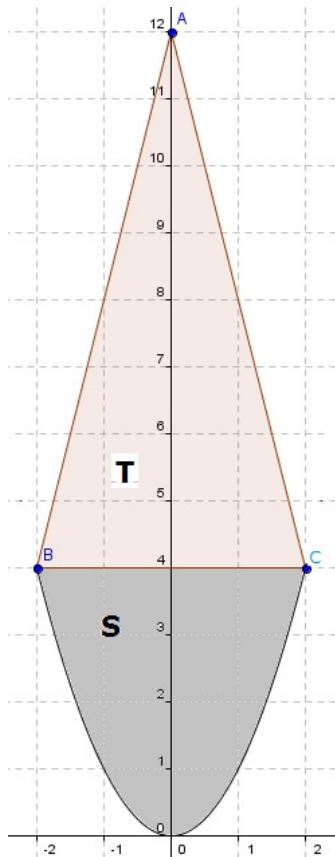
$$A_T'(1) = 12 - 3 \cdot 1^2 = 9 > 0 \text{ creciente}$$

$$A_T'(3) = 12 - 3 \cdot 3^2 = -15 < 0 \text{ decreciente}$$

Como a la izquierda de $x = 2$ $A_T(x)$ es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto. Luego, el área del triángulo T es máxima para $x = 2$.

Y finalmente, los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima son $B(-2, 4)$ y $C(2, 4)$.

El escudo completo será:



c) Área de la superficie S

La recta que pasa por los puntos B y C es $y = 4$. Por lo tanto la superficie S está limitada por las funciones $y = 4$ e $y = x^2$ para $-2 \leq x \leq 2$. Su área podemos calcularla mediante la siguiente integral definida,

$$A_S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

La superficie S mide $\frac{32}{3}$ u.a.

d) Para obtener el área total del escudo, calculemos el área del triángulo T máximo (para $x = 2$), $A_T(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16$, es decir, el área del triángulo máximo es de 16 u.a.

$$\text{Obtenemos el área del escudo, } A_E = 16 + \frac{32}{3} = \frac{48 + 32}{3} = \frac{80}{3} \text{ u.a.}$$

El área total del escudo es $\frac{80}{3}$ u.a.