Lista de Exercícios - Sistemas Lineares

Rafael - Lumen Edu

October 16, 2024

Questões Estilo ENEM

1. Uma loja vende três tipos de frutas: maçãs, bananas e laranjas. O preço de 1 maçã e 2 bananas é R$ 11,00. O preço de 3 maçãs e 1 laranja é R$ 22,00. O preço de 2 bananas e 2 laranjas é R$ 20,00. Determine o preço de cada fruta.

2. (Enem 2023) O metrô de um município oferece dois tipos de tiquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tiquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tiquetes azuis e uma cartela de tiquetes vermelhos são vendidas por R$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tiquete azul menos o preço de um tiquete vermelho é igual ao preço de um tiquete vermelho mais cinco centavos.

   Qual o preço, em real, de uma cartela de tiquetes vermelhos?

3. Em uma sorveteria, a combinação de 2 bolas de chocolate e 1 bola de baunilha custa R$ 12,00. A combinação de 1 bola de chocolate e 2 de morango custa R$ 13,00. Se uma bola de morango custa R$ 4,00, quanto custa cada bola de chocolate e baunilha?

4. Uma agência de viagens vende dois tipos de pacotes turísticos. O pacote de 5 dias custa R$ 1.500,00 e inclui 2 passeios, e o de 7 dias custa R$ 2.000,00 e inclui 3 passeios. Uma pessoa quer gastar no máximo R$ 5.000,00 em 4 pacotes com 8 passeios. Quantos pacotes de cada tipo ela deve comprar?

5. Um parque tem dois circuitos de tamanhos diferentes para corridas. Um corredor treina nesse parque e, no primeiro dia, inicia seu treino percorrendo 3 voltas em torno do circuito maior e 2 voltas em torno do menor, perfazendo um total de 1 800 m. Em seguida, dando continuidade a seu treino, corre mais 2 voltas em torno do circuito maior e 1 volta em torno do menor, percorrendo mais 1 100 m. No segundo dia, ele pretende percorrer 5 000 m nos circuitos do parque, fazendo um número inteiro de voltas em torno deles e de modo que o número de voltas seja o maior possível. A soma do número de voltas em torno dos dois circuitos, no segundo dia, será:

Questões Diretas Simples

1. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

2. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

3. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 8 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$$

Questões Diretas Intermediárias

1. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 5 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

2. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

3. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x + y + z = 6 \\ 4x - y + 2z = 15 \end{cases}$$

Questões Diretas Avançadas

1. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ 2x - y + 3z - w = 5 \\ -x + 2y - z + w = 8 \\ 3x - y + 2z + w = 15 \end{cases}$$

2. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4x + y - z + w = 12 \\ x - y + z + 2w = 7 \\ 2x + 3y - 2z + w = 14 \\ 3x - 2y + z + 4w = 9 \end{cases}$$

3. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z + w + v = 20 \\ 2x - y + 3z - w + v = 10 \\ -x + 2y - z + w - v = 15 \\ 3x - y + 2z + w + v = 18 \\ x - y + z - w + 2v = 9 \end{cases}$$

Questões Teóricas Fáceis/Intermediárias

1. O que significa dizer que um sistema é **inconsistente**? Dê exemplos.

2. Para que valores de k, o sistema a seguir é impossível?

$$\begin{cases} 2x + ky = 6 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$

3. Qual é a condição para que um sistema seja **indeterminado**? Use um exemplo com duas variáveis e duas equações.

4. Para que valor de k o sistema a seguir tem infinitas soluções?

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6x + ky = 12 \end{cases}$$

Questões Teóricas Avançadas

1. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x + by + w = 6 \\ x + 2by + 2z + 2w = 14 \\ 2y + 5cz + 3w = 20 \\ x + y + z + w = 8 \end{cases}$$

Sabendo que $b * c = -\frac{3}{5}$ e que b e c são diferentes de 0, existe valor de b racional que faça o sistema não ter solução única? E real? Se sim, qual é o valor positivo de b que satisfaça essas condições?

2. Um sistema de três variáveis x, y e z é dado pelas equações:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + 2by + 2cz = f \\ ax + 2by + 5cz = j \end{cases}$$

Mostre que a existência de uma solução única depende do determinante da matriz dos coeficientes e de outras condições para os coeficientes. Use exemplos específicos para ilustrar.

Soluções

Questões Estilo ENEM

1. **Solução:** Seja m, b e l os preços de uma maçã, banana e laranja, respectivamente. O sistema de equações é:

$$\begin{cases} m + 2b = 11 \\ 3m + l = 22 \\ 2b + 2l = 20 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos: $m = 5$, $b = 3), l = 7)$.

2. **Solução:** O metrô de um município oferece dois tipos de tiquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, vendidos em cartelas com nove tiquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tiquetes azuis e uma cartela de tiquetes vermelhos são vendidas por R$ 32,40. O preço de um tiquete azul menos o preço de um tiquete vermelho é igual ao preço de um tiquete vermelho mais cinco centavos.

Pergunta: Qual o preço, em reais, de uma cartela de tiquetes vermelhos?

Seja:

- a o preço de um tiquete azul;
- v o preço de um tiquete vermelho.

A primeira informação nos dá o seguinte sistema:

$$2(9a) + 9v = 32{,}40$$

ou seja,

$$18a + 9v = 32{,}40 \quad (1)$$

A segunda informação afirma que o preço de um tiquete azul menos o preço de um tiquete vermelho é igual ao preço de um tiquete vermelho mais 5 centavos, ou seja:

$$a - v = v + 0{,}05 \quad (2)$$

Simplificando a equação (2):

$$a - 2v = 0{,}05 \quad (3)$$

Agora, vamos resolver o sistema formado pelas equações (1) e (3).

Primeiro, da equação (3), podemos isolar a:

$$a = 2v + 0{,}05$$

Substituímos esse valor de a na equação (1):

$$18(2v + 0{,}05) + 9v = 32{,}40$$

$$
\begin{aligned}
36v + 0{,}90 + 9v &= 32{,}40 \\
45v + 0{,}90 &= 32{,}40 \\
45v &= 32{,}40 - 0{,}90 \\
45v &= 31{,}50 \\
v &= \frac{31{,}50}{45} = 0{,}70
\end{aligned}
$$

Portanto, o preço de um tiquete vermelho é $R\$0{,}70$. O preço de uma cartela com 9 tiquetes vermelhos é:

$$9v = 9 \times 0{,}70 = 6{,}30$$

Resposta: O preço de uma cartela de tiquetes vermelhos é R$ 6,30.

3. **Solução:** Temos:

$$\begin{cases} 2C + B = 12 \\ C + 2M = 13 \\ M = 4 \end{cases}$$

Substituindo $M = 4$, encontramos que $C = 5$ e $B = 2$.

4. **Solução:** Representamos os pacotes de 5 e 7 dias como x e y. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 1500x + 2000y \leq 5000 \\ 2x + 3y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

A pessoa deve comprar $x = 4$ pacotes de 5 dias e $y = 0$ pacotes de 7 dias.

5. **Solução:** Para representar a situação, podemos fazer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3M + 2m = 1800 \\ 2M + m = 1100 \end{cases}$$

Onde M é a quantidade de voltas na pista maior e m é a quantidade de voltas na pisa menor. Resolvendo temos $M = 400$ e $m = 300$. Como queremos o maior número de voltas, temos que ter o maior número possível de voltas na pista menor. Sabemos que para 16 voltas na pista menor, o total de metros percorridos será 4800. Sabemos que os metros que sobram, $x = 500 - 4800 = 200$ não é um número múltiplo de 400, por isso teremos que testar para valores menores de voltas. Fazendo isso, descobrimos que para 14 voltas pequenas terão sido percorridos 4200 metros, e o resto $x = 5000 - 4200 = 800$ é um número divisível por 400. Assim, o maior número possível de voltas é $14 + 2 = 16$.

Questões Diretas Simples

1. **Estratégia:** Método de substituição.

$$x = \frac{3}{2}, y = 1$$

2. **Estratégia:** Substituir x na segunda equação.

$$x = \frac{16}{7}, y = \frac{20}{7}$$

3. **Estratégia:** Método de substituição ou eliminação.

$$x = 2, y = 1, z = -1$$

Questões Diretas Intermediárias

1. **Estratégia:** Método da eliminação para simplificar.

$$x = 2, y = 1, z = 0$$

2. **Estratégia:** Usar substituição progressiva.

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

3. **Estratégia:** Eliminação para simplificar o sistema.

$$x = 3, y = 1, z = 2$$

Questões Diretas Avançadas

1. **Estratégia: Eliminação progressiva.**
Neste caso, a eliminação progressiva consiste em transformar as equações de modo que cada vez menos variáveis apareçam em cada uma das equações. O sistema original é:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ 2x - y + 3z - w = 5 \\ -x + 2y - z + w = 8 \\ 3x - y + 2z + w = 15 \end{cases}$$

Passo 1: Escolha a primeira equação para eliminar x das outras equações. Uma sugestão é começar somando a segunda equação com todas as demais, fazendo com que a variável w suma. À partir daí, a solução fica mais simples, podendo-se isolar uma variável ou continuar o processo de soma e subtração. Após o processo, obtemos as soluções:

$$x = 1, y = 2, z = 3, w = 4$$

2. **Estratégia: Eliminação** O sistema é:

$$\begin{cases} 4x + y - z + w = 12 \\ x - y + z + 2w = 7 \\ 2x + 3y - 2z + w = 10 \\ 3x - 2y + z + 3w = 13 \end{cases}$$

Passo 1: Somamos a primeira equação à segunda para eliminar uma variável. Aplicamos o método de substituição para isolar x e w. Ao reduzir o sistema, substituímos os valores progressivamente até encontrar:

$$x = 2, y = 1, z = 0, w = 3$$

3. **Solução da Questão 3 com Matrizes e Regra de Chió:**

O sistema é:

$$\begin{cases} x + y + z + w + v = 10 \\ 2x - y + 3z - w + v = 11 \\ -x + 2y - z + w - v = -4 \\ 3x - y + 2z + w + v = 13 \\ x - y + z - w + 2v = 10 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Passo 1: Regra de Chió para Determinante de A

A regra de Chió permite reduzir a matriz de ordem 5×5 até obter uma matriz menor. Primeiro, eliminamos a primeira linha e a primeira coluna, subtraindo o resultado da multiplicação dos devidos termos do termo que queremos calcular (caso tenha dúvidas sobre a Regra de Chió, veja a nossa aula sobre matrizes) e calculamos o determinante da matriz reduzida:

$$\det(A) = -11$$

Passo 2: Regra de Cramer Aplicamos a regra de Cramer. Para a variável x, substituímos a primeira coluna pela matriz dos termos independentes $\mathbf{b} = (20, 10, 15, 18, 9)$. Calculamos os determinantes de A_x, A_y, A_z, A_w e A_v usando a matriz transformada por Chió. Finalmente, aplicamos:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}, \quad w = \frac{\det(A_w)}{\det(A)}, \quad v = \frac{\det(A_v)}{\det(A)}$$

O resultado final é:

$$x = 3, y = 2, z = 1, w = 0, v = 4$$

Questões Teóricas Fáceis/Intermediárias

1. **Explicação:** Um sistema é inconsistente quando as equações representam retas paralelas ou planos paralelos que não se encontram. Não há solução.
2. **Solução:** Para que o sistema seja impossível, o valor de k deve ser tal que as equações sejam paralelas, ou seja, $k = 6$.
3. **Explicação:** Um sistema é indeterminado quando há mais de uma solução, o que ocorre quando as equações são dependentes linearmente. A condição é que as equações representem o mesmo conjunto de soluções.
4. **Solução:** Para que o sistema tenha infinitas soluções, o valor de k deve ser $k = 4$, de modo que as equações sejam múltiplas uma da outra.

Questões Teóricas Avançadas

1. **Explicação:** Utilizando a Regra de Cramer, pode-se igualar o determinante dos coeficientes como sendo 0 e calcular a relação entre b e c. Substituindo com o valor dado de bc, pode-se encontrar uma equação quadrática para b e para c, de tal forma que a o valor positivo de b encontrado é:

$$\frac{5+\sqrt{145}}{20}$$

   Logo, não existe valor racional para b que torne o sistema indeterminado, já que o resultado encontrado é irracional. Porém, existe solução real positiva para b.

2. **Explicação:** A existência de uma solução única depende do valor do determinante da matriz dos coeficientes. Se o determinante for zero, o sistema não terá uma solução única. Se for diferente de zero, o sistema terá uma solução única. Caso o determinante for igual à zero, será necessário verificar a multiiplicidade dos termos. Por exemplo, temos os casos:

$$d = j \implies Imposs.$$
$$e = a, d = f \implies Imposs.$$
$$e = 2a, f = 2d \implies Infinitas$$