

Convocatoria ordinaria de 2025

Resolución de los siete ejercicios, con desarrollo de los apartados obligatorios y optativos.

Ejercicio 1

Sean J, C, P los precios del jersey, la camisa y el pantalón. La relación dada es $J = (C + P)/3$ y el total es $J + C + P = 80$. Sustituyendo $C + P = 3J$:

$$4J = 80 \implies J = 20, \quad C + P = 60.$$

Así, el jersey sí queda determinado. En cambio, solo conocemos la suma de camisa y pantalón, por lo que sus precios no se determinan por separado.

Con los descuentos, se cumple

$$0.7J + 0.6C + 0.8P = 57.$$

Al sustituir $J = 20$ y $C + P = 60$, obtenemos $0.6C + 0.8P = 43$. Restando $0.6(C + P) = 36$ queda $0.2P = 7$, luego

$$J = 20 \text{ €}, \quad C = 25 \text{ €}, \quad P = 35 \text{ €}.$$

Ejercicio 2

Para que el límite sea finito, el término lineal del numerador debe anularse. Usamos $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$, $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ y $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$:

$$\sin x - ax + 2 - 2\cos x = (1 - a)x + x^2 + o(x^2),$$

$$e^x - x \cos x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Por tanto, $a = 1$, y con ese valor el cociente tiende a $1/(1/2) = 2$. La respuesta es $a = 1, \quad L = 2$.

Ejercicio 3

El dominio es $(0, +\infty)$. Al tender x a $+\infty$, $\ln(x)/x^2 \rightarrow 0$, así que la asíntota horizontal es $y = a$. Para que sea $y = 1$, debe ser $a = 1$.

Para el apartado b, $f(x) = \ln(x)/x^2$. El signo de la derivada permite estudiar la monotonía:

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

El denominador es positivo. El numerador se anula cuando $x = \sqrt{e}$, es positivo antes y negativo después. Por tanto, f crece en $(0, \sqrt{e})$ y decrece en $(\sqrt{e}, +\infty)$; tiene un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$, de valor

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}.$$

Como $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, no hay mínimo relativo adicional ni mínimo absoluto.

Ejercicio 4

El volumen del tetraedro con un vértice en el origen se calcula mediante $V = \frac{1}{6} |\det(A, B, C)|$. Con $A = (0, 2, -2)$, $B = (1, 2, m)$ y $C = (2, 3, 2)$, el determinante es $2(2m - 1)$. La condición $V = 3$ da

$$\frac{|2(2m - 1)|}{6} = 3 \implies |2m - 1| = 9,$$

por lo que $m = 5$ o $m = -4$.

Para $m = 0$, tomamos $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 4)$. Su producto vectorial $(-2, 0, 1)$ es normal al plano ABC . Al usar el punto A , resulta

$$-2x + z + 2 = 0.$$

La distancia del origen a este plano es

$$d = \frac{|2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ejercicio 5

La recta tiene punto $Q = (1, 2, 3)$ y director $\vec{d} = (1, 2, 2)$. Con el punto $P = (1, 1, 1)$, un segundo vector para el plano es $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 2)$. Su producto vectorial con $\vec{d}$ da un normal $(2, -2, 1)$. Usando P , el plano pedido es

$$2x - 2y + z - 1 = 0.$$

Para la perpendicular por P , buscamos primero el pie H de la perpendicular sobre r . Un punto de r es $Q + t\vec{d}$, y debe cumplirse $(P - Q - t\vec{d}) \cdot \vec{d} = 0$. Como $(P - Q) \cdot \vec{d} = -6$ y $\|\vec{d}\|^2 = 9$, se obtiene $t = -2/3$ y

$$H = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Por tanto, $\overrightarrow{PH}$ es proporcional a $(-2, -1, 2)$. La recta en forma paramétrica es

$$x = 1 - 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 6

Integramos $f''(x) = e^{x-1} - 1/x$ dos veces. Como $x > 0$,

$$f'(x) = e^{x-1} - \ln x + C_1, \quad f(x) = e^{x-1} - x \ln x + x + C_1 x + C_2.$$

La condición $f(1) = 0$ da $C_1 + C_2 = -2$. La condición $f(2) = e - 2 - 2 \ln 2$ da $2C_1 + C_2 = -4$. Restando, $C_1 = -2$ y $C_2 = 0$. Así,

$$f(x) = e^{x-1} - x \ln x - x.$$

Ejercicio 7

El total de vehículos inspeccionados es $116383 + 2679 + 160667 + 3447 = 283176$.

a) Sea M «es una moto» y A «resultó apto». Para la unión usamos $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A)$:

$$P(M \cup A) = \frac{164114 + 277050 - 160667}{283176} = \frac{280497}{283176} \approx 0.9905.$$

b) Entre los coches hay $116383 + 2679 = 119062$ vehículos. La probabilidad condicionada de no apto, sabiendo que es coche, es

$$P(\text{no apto} \mid \text{coche}) = \frac{2679}{119062} \approx 0.02250.$$

Por tanto, es aproximadamente 2.25% .