

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Estudio y gráfica de una función

La función es

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}.$$

Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$, porque los denominadores se anulan en $x = -1$ y $x = 4$.

a) Asíntotas. En los puntos excluidos del dominio estudiamos los límites laterales. Al acercarnos a $x = -1$, el primer sumando permanece finito y el segundo tiende a infinito; en $x = 4$ ocurre lo mismo con el primer sumando. En concreto,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, $x = -1$ y $x = 4$ son asíntotas verticales. Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, ambos cocientes tienden a cero, así que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ y la asíntota horizontal en los dos extremos es $y = 0$.

b) Crecimiento e inflexión. El signo de la derivada indica dónde crece o decrece la función. Como el dominio separa la recta en tres intervalos, estudiamos cada uno:

$$f'(x) = -\frac{4}{(x-4)^2} - \frac{27}{2(x+1)^2} < 0 \quad (x \neq -1, 4).$$

La derivada es negativa en todo el dominio; por ello, f es decreciente en $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$ y $(4, +\infty)$, y no tiene intervalos de crecimiento.

Para localizar posibles puntos de inflexión calculamos la segunda derivada y buscamos dónde se anula:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-4)^3} + \frac{27}{(x+1)^3} = 0 \iff \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1} = 0.$$

Al reducir a común denominador, $2(x+1) + 3(x-4) = 0$, de donde $x = 2$. La segunda derivada cambia de signo al atravesar ese valor, así que hay un punto de inflexión. Su ordenada es

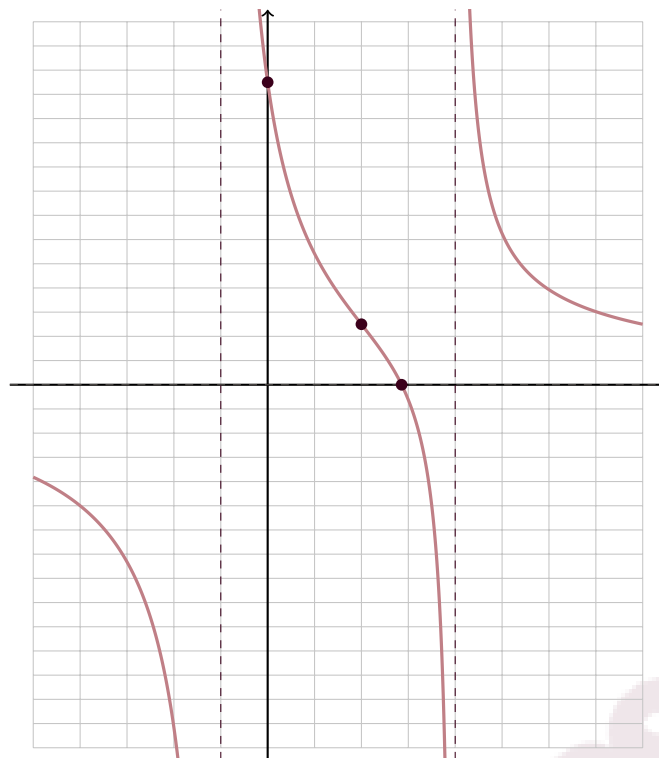
$$f(2) = \frac{4}{-2} + \frac{27}{6} = \frac{5}{2}.$$

Conclusión. La función decrece en cada uno de los tres intervalos de su dominio y tiene un punto de inflexión en $(2, \frac{5}{2})$.

c) Esbozo. Para situar los cortes con los ejes, resolvemos $f(x) = 0$ y calculamos $f(0)$:

$$8(x+1) + 27(x-4) = 0 \implies x = \frac{20}{7}, \quad f(0) = \frac{25}{2}.$$

El dibujo recoge estos puntos, las asíntotas y el comportamiento decreciente de cada rama.



Opción A - Ejercicio 2. Determinante, rango y sistema homogéneo

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Determinante y rango.** Para calcular el determinante, restamos a veces la primera fila a cada una de las otras filas, operaciones que no modifican su valor:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna y sacando el factor $(a-1)$ de cada una de las tres filas restantes,

$$\det A = (a-1)^3 \det \begin{pmatrix} -1 & -(a+1) & -a \\ 0 & -(a+1) & -(a+1) \\ 0 & -a & -(a+1) \end{pmatrix} = -(a-1)^3(a+1).$$

Si $a \neq 1, -1$, el determinante no es nulo y, por tanto, $\text{rg}(A) = 4$. Para $a = 1$, todas las filas son iguales y no nulas, de modo que el rango es 1. Para $a = -1$, el determinante se anula, pero el menor formado por las filas 1, 2, 4 y las columnas 1, 2, 3 vale -4 ; así, el rango es al menos 3 y, al ser el determinante nulo, es exactamente 3. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 4$ si $a \neq \pm 1$, $\text{rg}(A) = 1$ si $a = 1$ y $\text{rg}(A) = 3$ si $a = -1$.

b) **Caso $a = 1$.** La matriz queda formada por unos. La ecuación matricial $AX = O$ equivale a

$$x + y + z + w = 0.$$

Tomando y, z, w como parámetros libres, resulta

$$(x, y, z, w) = (-s - t - u, s, t, u), \quad s, t, u \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = 1$, esas son todas las soluciones del sistema homogéneo.

c) **Caso $a = -1$.** La reducción por filas de la matriz del sistema queda reflejada en

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $x = 0$, $z = 0$ e $y = w$. Tomando $w = t$ como parámetro libre:

$$(x, y, z, w) = (0, t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = -1$, las soluciones son $(0, t, 0, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 3. Trapecio, distancia y área

Calculamos los vectores de los lados opuestos AB y CD restando las coordenadas de sus extremos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, -3), \quad \overrightarrow{CD} = D - C = (4, -6, 6) = -2\overrightarrow{AB}.$$

Como son proporcionales, AB y CD son paralelos y $ABCD$ es un trapecio.

a) Distancia entre los lados paralelos. Al ser C un punto de la recta CD paralela a AB , la distancia entre ambas rectas es la distancia de C a la recta AB . Usamos la fórmula

$$d(C, AB) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Aquí $\overrightarrow{AC} = C - A = (-4, 2, -5)$, y

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-9, 2, 8), \quad \|(-9, 2, 8)\| = \sqrt{149}, \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{22}.$$

Conclusión. La distancia entre los lados paralelos es $\frac{\sqrt{149}}{\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{149}{22}}$.

b) Área del triángulo ABC . El área de un triángulo definido por dos vectores con el mismo origen es la mitad del módulo de su producto vectorial. Por tanto,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{149}}{2}.$$

Conclusión. El área del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{149}}{2}$ unidades cuadradas.

Opción A - Ejercicio 4. Proyección y esfera

La esfera es tangente al plano en P' , y el segmento PP' es un diámetro. El radio en el punto de tangencia es perpendicular al plano; por ello, P' es la proyección ortogonal de P sobre π .

El vector normal del plano $\pi : x + 2y - 2z + 2 = 0$ es $\vec{n} = (1, 2, -2)$. La recta perpendicular al plano por $P = (1, 2, -1)$ puede escribirse en forma paramétrica como

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(1, 2, -2).$$

Sustituyendo en el plano,

$$(1+t) + 2(2+2t) - 2(-1-2t) + 2 = 0 \implies 9 + 9t = 0,$$

por lo que $t = -1$ y $P' = (0, 0, 1)$.

El centro C de la esfera es el punto medio del diámetro PP' y el radio es la mitad de su longitud:

$$C = \frac{P + P'}{2} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \quad r = \frac{PP'}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \frac{3}{2}.$$

Conclusión. La esfera tiene centro $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ y radio $\frac{3}{2}$; su ecuación es $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$.

Opción B - Ejercicio 1. Posición relativa y ángulo

Usamos las rectas en forma paramétrica:

$$r_A : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(1, \lambda, 2), \quad r_B : (x, y, z) = (1, -2, 3) + s(1, 1, 1), \quad r_C : (x, y, z) = (4, 1, -3) + u(1, 1, -2).$$

a) Intersección de r_A y r_B . Para que se corten, sus coordenadas deben coincidir. La igualdad de las coordenadas x da $t = s$ y la de z da $1 + 2t = 3 + s$, de donde $t = s = 2$. La coordenada y exige $2 + 2\lambda = -2 + 2$, luego $\lambda = -1$. El punto de corte es $(3, 0, 5)$. **Conclusión.** Las rectas se cortan únicamente para $\lambda = -1$, en $(3, 0, 5)$.

b) Paralelismo de r_A con el plano de r_B y r_C . Un vector normal del plano se obtiene como producto vectorial de las direcciones $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, -2)$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3, 3, 0),$$

que podemos simplificar a $(1, -1, 0)$. El plano pasa por $B = (1, -2, 3)$, por lo que su ecuación general es $x - y - 3 = 0$. Para que r_A sea paralela al plano, su dirección debe ser perpendicular a $\vec{n}$:

$$(1, -1, 0) \cdot (1, \lambda, 2) = 1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1.$$

Con ese valor, el punto A no pertenece al plano, pues $1 - 2 - 3 = -4 \neq 0$; la recta es paralela y exterior al plano. **Conclusión.** r_A es paralela al plano de r_B y r_C cuando $\lambda = 1$.

c) Ángulo entre r_B y r_C . Para el ángulo θ entre dos rectas empleamos sus vectores directores:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Como $(1, 1, 1) \cdot (1, 1, -2) = 1 + 1 - 2 = 0$, las direcciones son perpendiculares. **Conclusión.** El ángulo entre r_B y r_C es 90° .

Opción B - Ejercicio 2. Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & \lambda & 1 - \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & -2\lambda \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante para identificar los valores en que el sistema puede dejar de tener solución única:

$$\det A = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1).$$

Si $\lambda \neq 2, -1$, el determinante es no nulo, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, y Rouché-Frobenius asegura que el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 2$, las filas de A son proporcionales y $\text{rg}(A) = 1$. En la ampliada, sin embargo, las filas no mantienen la misma proporción: por ejemplo, las dos primeras filas de coeficientes tienen razón 2, mientras que sus términos independientes son -1 y -4 . Así, $\text{rg}(A^*) = 2 > \text{rg}(A)$ y el sistema es incompatible.

Si $\lambda = -1$, el menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale 3, así que $\text{rg}(A) \geq 2$; como el determinante es cero, $\text{rg}(A) = 2$. La tercera ecuación es la opuesta de la primera, también en el término independiente, por lo que no aumenta el rango de la ampliada: $\text{rg}(A^*) = 2$. Al coincidir ambos rangos y ser menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. **Conclusión.** El sistema es SCD si $\lambda \neq 2, -1$, SI si $\lambda = 2$ y SCI si $\lambda = -1$.

b) Resolución para $\lambda = 1$. Como $\lambda = 1$ no es singular, hay una solución única. El sistema queda

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ x + y = -2, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación $z = -y$ y de la segunda $x = -2 - y$. Al sustituir en la primera, $2(-2 - y) + y - y = 0$, de donde $y = -2$. Así, $x = 0$ y $z = 2$. **Conclusión.** Para $\lambda = 1$, $(x, y, z) = (0, -2, 2)$.

c) Resolución para $\lambda = -1$. Ya sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones. La primera y la segunda ecuación son

$$2x - y - z = 2, \quad x + y - 2z = 2.$$

Tomamos $z = t$ como parámetro. Sumando las ecuaciones se obtiene $3x - 3z = 4$, de donde $x = t + \frac{4}{3}$. Al sustituir en la segunda resulta $y = t + \frac{2}{3}$. La tercera ecuación repite la primera con signo cambiado.

$$(x, y, z) = \left(t + \frac{4}{3}, t + \frac{2}{3}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $\lambda = -1$, esa es la familia de soluciones.

Opción B - Ejercicio 3. Recta tangente e integral

La función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ es racional y su denominador es siempre positivo; por tanto, está definida en todo $\mathbb{R}$.

a) Tangente en $x = 0$. La recta tangente en x_0 tiene ecuación $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Así, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, luego la tangente es

$$y - 0 = 1(x - 0).$$

Conclusión. La recta tangente en $x = 0$ es $y = x$.

b) Integral. Sustituyendo la expresión de f en el integrando,

$$\int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx.$$

Para integrar, separamos $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$; la segunda parte tiene como primitiva $\arctan x$:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = [x - \arctan x]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Conclusión. El valor de la integral es $1 - \frac{\pi}{4}$.

Opción B - Ejercicio 4. Límites, monotonía y asíntotas

La función es $f(x) = e^{1/x}$ y su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que el exponente $1/x$ no está definido en $x = 0$.

a) Límites. Cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$, se tiene $1/x \rightarrow 0$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1.$$

En cambio, al acercarnos a cero por la izquierda, $1/x \rightarrow -\infty$ y $e^{1/x} \rightarrow 0$; por la derecha, $1/x \rightarrow +\infty$ y $e^{1/x} \rightarrow +\infty$. Como los límites laterales son distintos, el límite bilateral en cero no existe. **Conclusión.** Los límites en $+\infty$ y $-\infty$ valen 1; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

b) Esbozo, monotonía y asíntotas. La derivada es

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} < 0 \quad (x \neq 0),$$

por lo que la función decrece en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$. Los límites obtenidos muestran que $y = 1$ es asíntota horizontal en ambos extremos y que $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha (el límite lateral es infinito). La rama izquierda se aproxima a $y = 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y a $y = 0$ cuando $x \rightarrow 0^-$; la rama derecha baja desde $+\infty$ hacia $y = 1$.



Conclusión. La función decrece en los dos intervalos de su dominio, tiene asíntota horizontal $y = 1$ y asíntota vertical $x = 0$ por la derecha.