

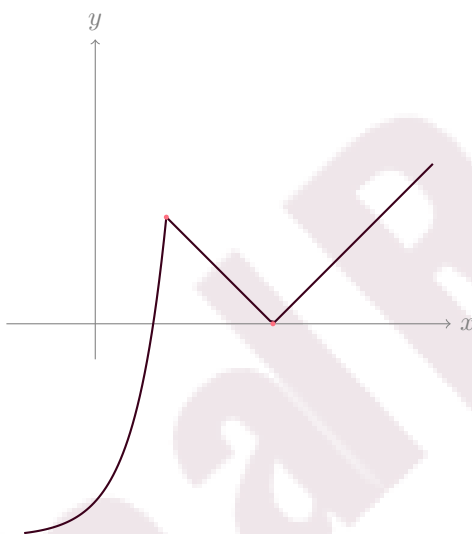
Continuidad y derivabilidad, áreas, rango de matrices, sistemas y simetría respecto de planos.

Opción A - Ejercicio 1

En $x = 2$ debe haber continuidad. Como $|2 - 5| = 3$, se impone

$$a^2 - 6 = 3 \implies a^2 = 9.$$

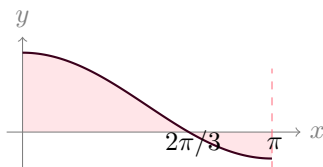
Dado que $a > 0$, resulta $a = 3$. Para dibujar la gráfica, a la izquierda de 2 usamos la exponencial $3^x - 6$ y desde 2 usamos $|x - 5|$. Ambas ramas se unen en $(2, 3)$; la exponencial corta el eje x en $x = \log_3 6$, y la segunda rama tiene vértice en $(5, 0)$. La función es derivable en cada intervalo abierto donde su expresión es suave. En $x = 2$, las derivadas laterales son $9 \ln 3$ y -1 , así que no coinciden; en $x = 5$, las derivadas laterales de $|x - 5|$ son -1 y 1 . Por tanto, f no es derivable en $x = 2$ ni en $x = 5$, y sí en el resto de su dominio.



Opción A - Ejercicio 2

La curva corta al eje x cuando $\frac{1}{2} + \cos x = 0$, es decir, en $x = 2\pi/3$ dentro del intervalo $[0, \pi]$. Está por encima del eje entre 0 y $2\pi/3$ y por debajo entre $2\pi/3$ y π . Por eso dividimos el área en esos dos tramos:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi/3} \left(\frac{1}{2} + \cos x \right) dx - \int_{2\pi/3}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos x \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \sin x \right]_0^{2\pi/3} - \left[\frac{x}{2} + \sin x \right]_{2\pi/3}^{\pi} \\ &= \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \boxed{\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$



Opción A - Ejercicio 3

La ecuación matricial da tres condiciones sobre a, b, c al multiplicar A por $(1, 2, 3)^t$:

$$-3 + 2 + 3 = 2, \quad 1 + 2a + 6 = 9, \quad -1 + 2b + 3c = 4.$$

De ellas, $a = 1$ y $2b + 3c = 5$. Además, $\text{rg}(A) = 2$ implica $\det A = 0$. Para $a = 1$,

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{vmatrix} = 7b - 4c - 1 = 0.$$

Resolvemos las dos ecuaciones lineales en b, c :

$$2b + 3c = 5, \quad 7b - 4c = 1 \implies \boxed{a = 1, \quad b = \frac{23}{29}, \quad c = \frac{33}{29}}.$$

El menor superior izquierdo de orden 2 vale $-4 \neq 0$, así que el rango es al menos 2; junto con $\det A = 0$, confirma que es exactamente 2. **Opción A - Ejercicio 4**

Los vectores normales de π_1 y π_2 no son proporcionales, por lo que los planos se cortan en una recta. Re-stando sus ecuaciones,

$$2y = -1 \implies y = -\frac{1}{2}, \quad x + z = \frac{3}{2}.$$

En esa recta, $3x + y + 3z = 3(x + z) + y = 4$, mientras que π_3 exige que valga 5. Por tanto, la recta de intersección de π_1 y π_2 es paralela a π_3 y no la corta. No existe ningún punto común a los tres planos. **Opción B - Ejercicio 1**

Los cortes con el eje x satisfacen $x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2) = 0$: son $-2, 0, 2$. La función es positiva en $(-2, 0)$ y negativa en $(0, 2)$; por simetría impar, las dos regiones tienen la misma área. El área total es

$$S = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2(8 - 4) = \boxed{8}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Desarrollamos alrededor de 0 las expresiones que aparecen en el límite:

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Para que el cociente tenga límite finito, debe anularse el término de primer grado del numerador, así que $2 + \alpha = 0$ y $\boxed{\alpha = -2}$. Entonces el numerador es $x^3/3 + o(x^3)$, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \sin x} = \frac{1/3}{1/6} = \boxed{2}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & m \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

El determinante es $\det A = m(m-5)$. Si $m \neq 0, 5$, ambas matrices tienen rango 3, y Rouché-Frobenius da un sistema compatible determinado (SCD). Si $m = 0$, el sistema se reduce a $x = 0$ e $y + 3z = 1$: los rangos son 2 y el sistema es compatible indeterminado (SCI), con soluciones $(0, 1 - 3t, t)$. Para $m = 5$, al eliminar x de las ecuaciones se obtiene una contradicción $0 = 2$. Por ello $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$; es un sistema incompatible (SI). Cuando $m = 6$, resolvemos:

$$2x + 6y = 0, \quad x + 6z = 6, \quad x + y + 3z = 1.$$

De la primera, $x = -3y$; sustituyendo en las otras, $z = 1 + y/2$ y $-2y + 3 = 1$, así que $y = 4$, $x = -12$, $z = 3$. La solución es $\boxed{(-12, 4, 3)}$. **Opción B - Ejercicio 4**

El plano que pasa por A, B, C tiene como normal el producto vectorial de dos vectores del plano:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (1, -2, -1), \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, 0, -4).$$

Podemos tomar como normal $n = (1, 0, 1)$. Al usar el punto $A = (1, 2, 3)$, la ecuación general del plano es $x + z - 4 = 0$. El pie de la perpendicular desde el origen se obtiene proyectándolo sobre la normal. Para reflejar el origen, duplicamos el vector desde el origen hasta dicho pie. Como $n \cdot n = 2$ y el término independiente es -4 ,

$$H = 0 - \frac{-4}{2}(1, 0, 1) = (2, 0, 2), \quad O' = 2H = (4, 0, 4).$$

El punto simétrico pedido es $\boxed{(4, 0, 4)}$.