

Convocatoria ordinaria de 2026

Resolución de los seis ejercicios, incluidos todos los apartados optativos.

Ejercicio 1

Sea r el radio del semicírculo y h la altura de la parte rectangular. El perímetro incluye dos alturas, el diámetro y el arco semicircular:

$$2h + 2r + \pi r = 8 \implies h = 4 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)r.$$

El área de la ventana es la suma de las áreas del rectángulo y el semicírculo:

$$A(r) = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = 8r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2.$$

La condición física $h \geq 0$ restringe r a $0 < r \leq 8/(2 + \pi)$. Derivamos para localizar el máximo:

$$A'(r) = 8 - (4 + \pi)r = 0 \implies r = \frac{8}{4 + \pi}.$$

Este valor pertenece al dominio y $A''(r) = -(4 + \pi) < 0$, por lo que da el máximo. En ese punto $h = r$. Las dimensiones son

$$\text{radio } r = \frac{8}{4 + \pi} \text{ m, anchura } 2r = \frac{16}{4 + \pi} \text{ m, altura rectangular } h = \frac{8}{4 + \pi} \text{ m.}$$

El área máxima correspondiente es $A_{\max} = \frac{32}{4 + \pi} \text{ m}^2$.

Ejercicio 2

Los cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto de tres vectores con origen en A es cero. Tomamos

$$\vec{AB} = (1, m - 2, 1), \quad \vec{AC} = (2, 2, 2), \quad \vec{AD} = (0, -3, m).$$

Entonces

$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = -2m(m - 3).$$

Se anula para $m = 0$ o $m = 3$.

Para $m = 1$, $\vec{AB} = (1, -1, 1)$ y $\vec{AC} = (2, 2, 2)$. Su producto vectorial es $(-4, 0, 4)$, de módulo $4\sqrt{2}$. El área del triángulo es

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}(4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Además, $\vec{AD} = (0, -3, 1)$ y el producto mixto con ese normal vale 4. El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{|4|}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ejercicio 3.1

Sean v, c, p los precios anteriores de verdura, carne y pescado. Antes del aumento,

$$v + c + p = 115, \quad p = 2v.$$

El aumento total fue de 19 euros:

$$0.12v + 0.15c + 0.20p = 19.$$

Al sustituir $p = 2v$ y $c = 115 - 3v$, obtenemos $0.07v = 1.75$, de donde $v = 25$, $c = 40$ y $p = 50$. Tras aplicar los porcentajes de subida, los precios semanales son

$$28 \text{ €}, \quad 46 \text{ €}, \quad 60 \text{ €}$$

para verdura, carne y pescado, respectivamente.

Ejercicio 3.2

Tomando determinantes en $A^3XB^t = 5B^2A^{-1}$, con $\det A = 2$ y $\det B = 4$:

$$2^3 \det X \cdot 4 = 5^2 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\det X = 25/4$.

Para $A^3YB^{-1} = A^2$, multiplicamos por B a la derecha y por A^{-3} a la izquierda, con lo que $Y = A^{-1}B$. Al calcular el producto,

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.1

La recta r tiene director $\vec{d} = (-2, 2, 2)$ y el plano π tiene normal $\vec{n} = (1, -2, 1)$. La intersección se obtiene sustituyendo la recta en el plano: $2 - 4\lambda = 0$, luego $\lambda = 1/2$ y $H = (-1, 0, 4)$.

La dirección de una recta contenida en π y perpendicular a r debe ser perpendicular tanto a $\vec{d}$ como a $\vec{n}$. El producto vectorial da la dirección $(3, 2, 1)$. Así, la recta pedida es

$$x = -1 + 3t, \quad y = 2t, \quad z = 4 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para reflejar $P = (1, 1, 1)$ en el plano, usamos $P' = P - 2 \frac{\vec{n} \cdot P - 3}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$. Como $\vec{n} \cdot P - 3 = -3$ y $\|\vec{n}\|^2 = 6$,

$$P' = (2, -1, 2).$$

Ejercicio 4.2

Sean A, B, C los sucesos de que el coche proceda de cada máquina y D el suceso de que sea defectuoso. Sumamos las probabilidades de los tres caminos:

$$P(D) = 0.45(0.03) + 0.30(0.04) + 0.25(0.05) = 0.038.$$

Por tanto, la probabilidad de defecto es 3.8% .

La probabilidad condicionada de que proceda de cada máquina, dado que es defectuoso, es

$$P(A | D) = \frac{0.0135}{0.038} \approx 0.3553, \quad P(B | D) = \frac{0.012}{0.038} \approx 0.3158, \quad P(C | D) = \frac{0.0125}{0.038} \approx 0.3289.$$

El valor mayor corresponde a la máquina A.