

Problema 1. Una empresa fabrica dos productos diferentes, P1 y P2, que vende a 300 y 350 € por tonelada (t), respectivamente. Para ello utiliza dos tipos de materias primas (A y B) y mano de obra. Las disponibilidades semanales de las materias primas son 30t de A y 36t de B, y las horas de mano de obra disponibles a la semana son 160. En la tabla siguiente se resumen los requerimientos (en t) de las materias primas y las horas de trabajo necesarias para la producción de una tonelada de cada producto:

Producto	materia prima (t)		Mano de obra (h)
	A	B	
P1	2	3	4
P2	3	1	20

Determina la producción semanal que maximiza los ingresos de la empresa sabiendo que un estudio de mercado indica que la demanda del producto P2 nunca supera a la del producto P1. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

Solución:

Llamando: $x =$ producción semanal, en t, del producto P1

$y =$ producción semanal, en t, del producto P2

Los datos del problema los podemos resumir en la tabla:

Producto	toneladas	materia prima (t)		Mano de obra (h)	Ingresos (€)
		A	B		
P1	x	$2x$	$3x$	$4x$	$300x$
P2	y	$3y$	$1y$	$20y$	$350y$
Restricciones		30	36	160	

Como las variables x e y representan toneladas de producto deben ser mayores o iguales a cero.

La ingresos vienen dados por la función: $z = 300x + 350y$

Las restricciones las obtenemos del enunciado:

Semanalmente dispone de 30 t de A: $2x + 3y \leq 30$

Semanalmente dispone de 36 t de B: $3x + y \leq 36$

Semanalmente dispone de 160 h de mano de obra: $4x + 20y \leq 160$; simplificando $x + 5y \leq 40$

“un estudio de mercado indica que la demanda de P2 nunca supera a la de P1”: $y \leq x$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar } z = 300x + 350y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 2x + 3y \leq 30 \\ 3x + y \leq 36 \\ x + 5y \leq 40 \\ y \leq x \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $2x + 3y \leq 30$

$2x + 3y = 30$

x	y
0	10
15	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 30$ Sí

(b) $3x + y \leq 36$

$3x + y = 36$

x	y
0	36
12	0

¿(0,0) cumple?

$3 \cdot 0 + 0 \leq 36$ Sí

(c) $x + 5y \leq 40$

$x + 5y = 40$

x	y
0	8
40	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 5 \cdot 0 \leq 40$ Sí

(d) $y \leq x$

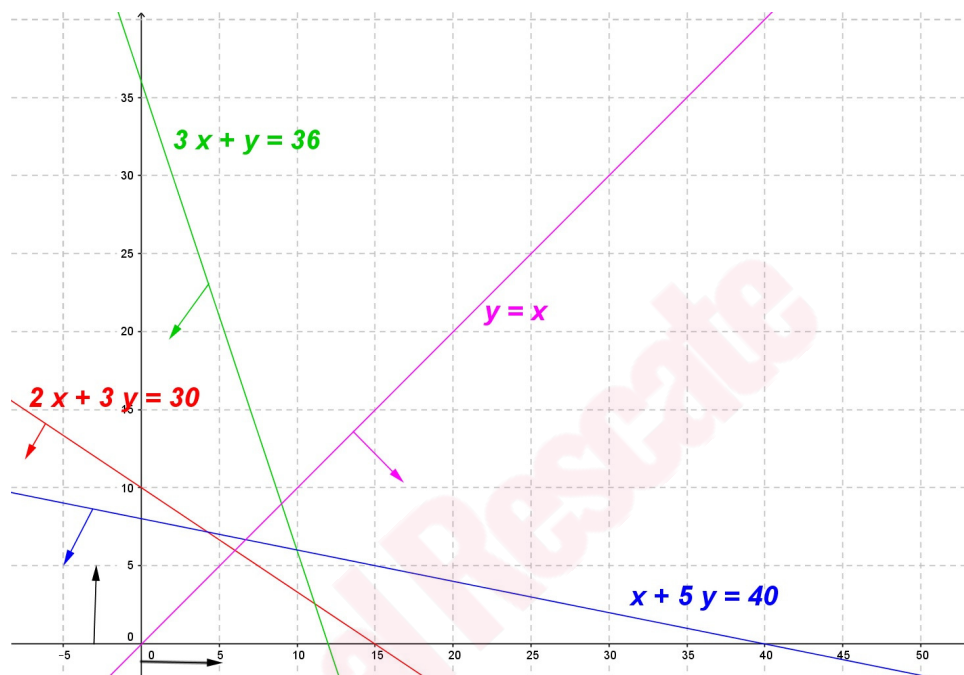
$y = x$

x	y
0	0
40	40

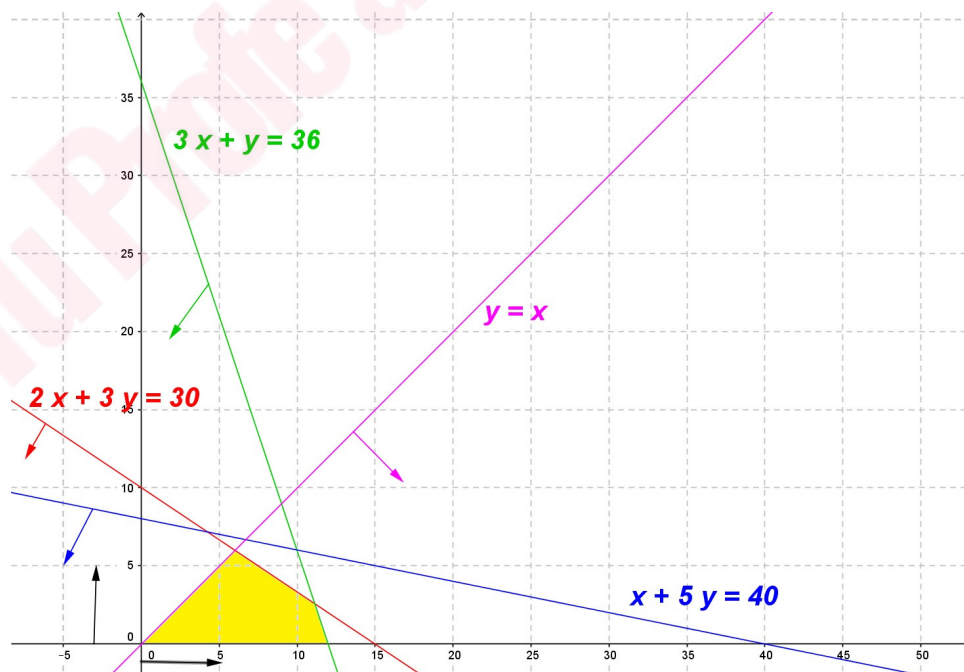
¿(5,0) cumple?

$0 \leq 5$ Sí

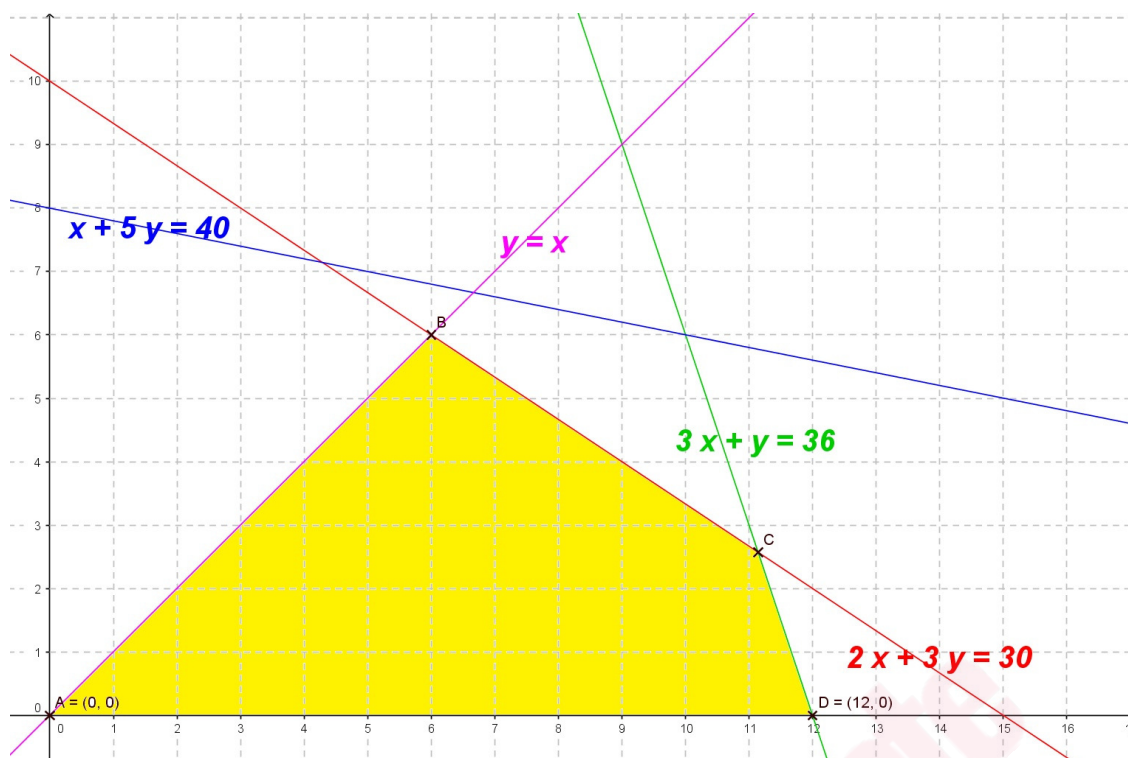
La representación gráfica será:



Y la región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.



Ampliamos la región factible y veamos los vértices que debemos calcular.



Los vértices de la región factible son A (0 , 0), B , C y D (12 , 0). Los vértices A, y D los conocemos directamente de la representación gráfica; los vértices B y C los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Punto B, corte entre (a) y (d):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ y = x \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y (de la 2ª) en la 1ª ecuación: $2x + 3x = 30$; $5x = 30$; $x = 6$
Luego B (6 , 6)

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ 3x + y = 36 \end{cases}$$

De la 2ª ecuación: $y = 36 - 3x$, sustituyendo este valor de y en la 1ª ecuación:
 $2x + 3(36 - x) = 30$; $2x + 108 - 9x = 30$; $-7x = 30 - 108$; $-7x = -78$

$$x = \frac{-78}{-7} = \frac{78}{7} \cong 11'1429. \quad \text{Luego, } y = 36 - 3 \cdot \frac{78}{7} = \frac{18}{7} \cong 2'5714$$

$$\text{Por tanto, } C \left(\frac{78}{7}, \frac{18}{7} \right)$$

Los vértices de la región factible son A (0 , 0), B (6 , 6), $C \left(\frac{78}{7}, \frac{18}{7} \right)$ y D (12 , 0)

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 300x + 350y$
0, 0	$300 \cdot 0 + 350 \cdot 0 = 0$
6, 6	$300 \cdot 6 + 350 \cdot 6 = 3900$
$\frac{78}{7}, \frac{18}{7}$	$300 \cdot \frac{78}{7} + 350 \cdot \frac{18}{7} = \frac{29700}{7} \cong 4242'86$
12, 0	$300 \cdot 12 + 350 \cdot 0 = 3600$

El máximo se alcanza en el punto $\left(\frac{78}{7}, \frac{18}{7} \right) \approx (11'14, 2'57)$

Por tanto, para maximizar los ingresos, semanalmente, debe producir 11'14 t del producto P1 y 2'57 t del P2. Con esta producción los ingresos máximos serán de 4242'86 €.

Problema 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 1 \\ \frac{6}{x^2 + 1} & 1 < x \end{cases}$.

- Estudia la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $] -\infty, +\infty [$.
- Calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.
- Calcula el área de la región limitada por $f(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Continuidad de $f(x)$ en $] -\infty, +\infty [$.

Para $x < 1$, $f(x) = x^2 + 2$, polinomio luego continua.

Para $x > 1$, $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$, cociente de polinomios cuyo denominador, $x^2 + 1$, es siempre distinto de cero luego continua.

Veamos para $x = 1$,

$$a) f(1) = 1^2 + 2 = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{6}{x^2 + 1} = \frac{6}{1 + 1} = 3 \end{cases} = 3$$

$$c) f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $] -\infty, +\infty [$.

b) Máximos y mínimos locales de $f(x)$.

Tenemos en cuenta que $f(x)$, por el apartado a), es continua en $\mathbb{R}$.

Calculamos $f'(x)$.

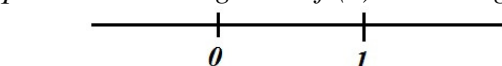
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ \frac{-6 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} & 1 < x \end{cases} = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ \frac{-12x}{(x^2 + 1)^2} & 1 < x \end{cases}$$

Resolvamos $f'(x) = 0$

$$2x = 0 \rightarrow x = 0 \quad (\text{válido porque } 0 < 1)$$

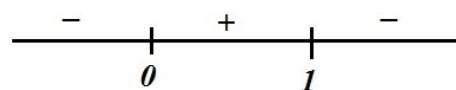
$$\frac{-12x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -12x = 0 \rightarrow x = 0 \quad (\text{no válido } 1 < 0 \text{ es falso})$$

Hay que estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos



x	f'
-1	$2 \cdot (-1) = -2 < 0$
$0,5$	$2 \cdot 0,5 = 1 > 0$
2	$\frac{-12 \cdot 2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-24}{25} < 0$

Por tanto, el signo de f' será:



El estudio anterior nos asegura que para $x = 0$ hay un mínimo local.

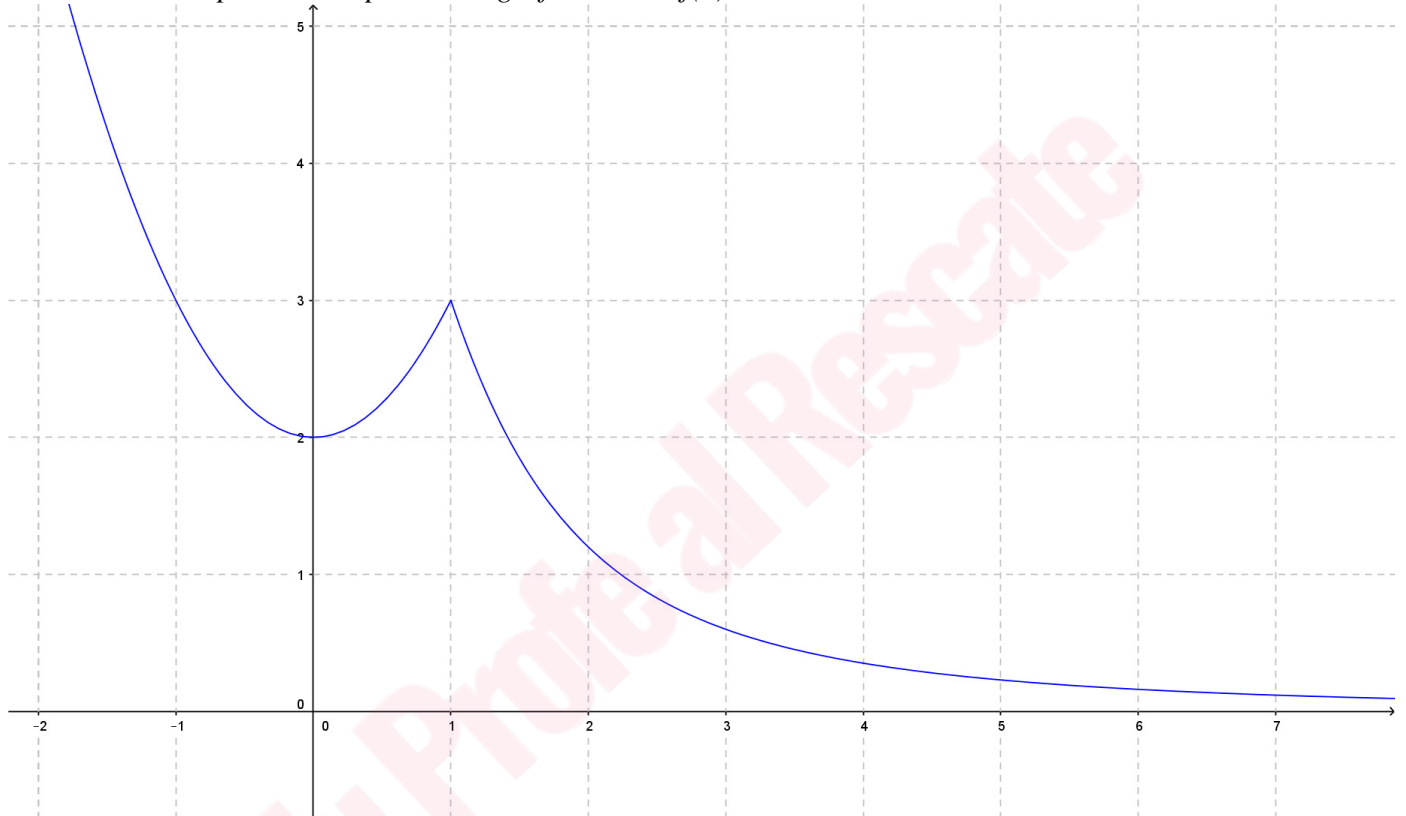
Considerando que no hemos calculado $f'(1)$, para determinar que ocurre en $x = 1$ vamos a representar $f(x)$.

Para $x \leq 1$, $f(x)$ es un polinomio de 2º grado, una parábola, cuyo vértice es el mínimo local obtenido antes, $x = 0$ e $y = 0^2 + 2 = 2$, mínimo local $(0, 2)$. Del estudio de continuidad sabemos que la función pasa por $(1, 3)$.

Para $x > 1$, $f(x)$ es un cociente de polinomios del que sabemos:

- parte del punto $(1, 3)$ {obtenido al estudiar la continuidad}
- es decreciente {obtenido al estudiar signo de $f'(x)$ }
- puntos de corte con ejes coordenados,
 - $x = 0$, no es de este trozo ($x > 1$)
 - $f(x) = 0$, $\frac{6}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow 6 = 0$, falso, no hay corte con eje X.
- asíntota horizontal,
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2 + 1} = \frac{6}{+\infty} = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$

Con estos datos podemos representar gráficamente $f(x)$:



A partir de la gráfica comprobamos que para $x = 1$ hay un máximo local.

Por tanto, la función $f(x)$ tiene un mínimo local en $(0, 2)$ y un máximo local en $(1, 3)$.

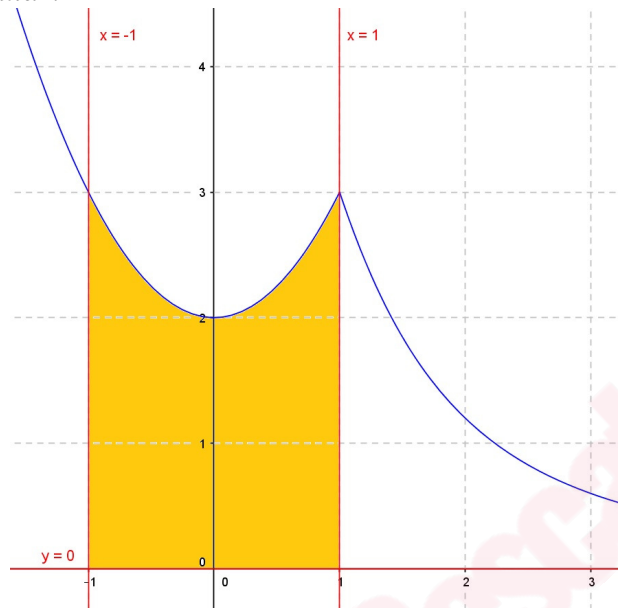
c) Área de la región limitada por $f(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Si representamos este área no estaría limitada por la parte inferior o superior, por lo que sería infinita.

Para calcular un área en el enunciado falta poner otra recta que la delimite, normalmente, $y = 0$.

Por tanto, vamos a calcular el “área de la región limitada por $f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$ ”

Representamos el área a calcular:



Esta área la obtenemos mediante la siguiente integral:

$$A = \int_{-1}^1 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + 2 \right) - \left(\frac{-1}{3} - 2 \right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 2 = \frac{14}{3} \cong 4'6667 \text{ u.a.}$$

Es decir, el área pedida mide **4'6667 u.a.**

Problema 3. El 25% de los estudiantes de un instituto no realizan ninguna actividad extraescolar, mientras que el 55% realizan una actividad extraescolar deportiva. Sabemos además que uno de cada cuatro estudiantes que practican una actividad extraescolar no deportiva también practica una deportiva. Se pide:

- Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar practique una actividad extraescolar deportiva y otra no deportiva.
- Calcular la probabilidad de que un estudiante practique una actividad extraescolar deportiva.
- ¿Son independientes los sucesos “Practicar una actividad extraescolar deportiva” y “Practicar una actividad extraescolar no deportiva”? Razona tu respuesta.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

E = Practicar actividad extraescolar

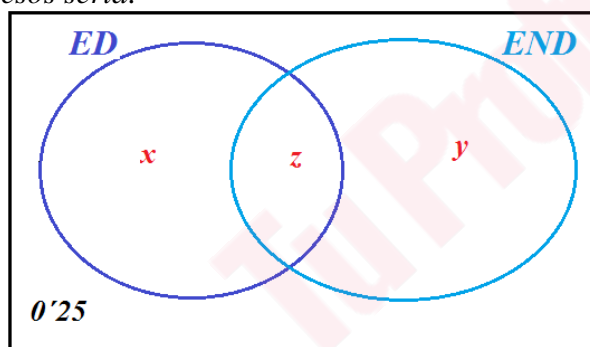
ED = Practicar actividad extraescolar deportiva

END = Practicar actividad extraescolar no deportiva

De los datos del problema sabemos:

- “El 25% de los estudiantes no realiza ninguna actividad extraescolar” $\rightarrow P(\bar{E}) = 0.25 \rightarrow$
{probabilidad del complementario} $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 0.25 = 0.75$
- “El 55% de los estudiantes realizan actividad extraescolar deportiva” $\rightarrow P(ED) = 0.55$
- “uno de cada cuatro estudiantes que practican actividad extraescolar no deportiva también practican una deportiva” $\rightarrow P(ED/END) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{P(ED \cap END)}{P(END)} = 0.25 \rightarrow P(ED \cap END) = 0.25 P(END)$

Considerando que los alumnos no practican actividades extraescolares o si y que los que practican actividades extraescolares las hacen deportivas, no deportivas o ambas. El diagrama de Venn correspondiente a estos sucesos sería:



Para resolver el problema debemos calcular los valores de x , y , z .

Anteriormente, en a), obtuvimos que $P(E) = 0.75$. Como $E = ED \cup END$, $0.75 = P(E) = P(ED \cup END)$

{Por probabilidad de la unión de sucesos} $P(ED \cup END) = P(ED) + P(END) - P(ED \cap END)$. Por tanto,
 $P(ED) + P(END) - P(ED \cap END) = 0.75$

En b), $P(ED) = 0.55$

En c), $P(ED \cap END) = 0.25 P(END)$

Por tanto, $0.55 + P(END) - 0.25 P(END) = 0.75$, efectuando operaciones,

$$0.55 + 0.75 P(END) = 0.75$$

$$0.75 P(END) = 0.75 - 0.55$$

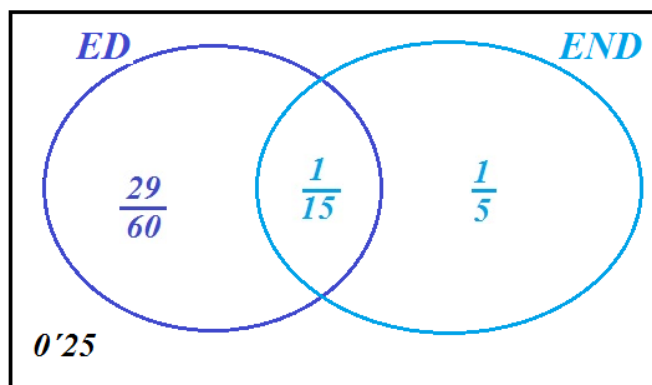
$$0.75 P(END) = 0.20 \rightarrow P(END) = \frac{0.20}{0.75} = \frac{4}{15}$$

Sustituyendo este valor en c), $P(ED \cap END) = 0.25 \frac{4}{15} = \frac{1}{15}$. Por tanto, $z = \frac{1}{15}$.

Como $P(ED) = 0'55$, según el diagrama de Venn, $x + z = 0'55 \rightarrow x + \frac{1}{15} = 0'55 \rightarrow x = 0'55 - \frac{1}{15} = \frac{29}{60}$

Y, finalmente, $x + y + z = 0'75 \rightarrow \frac{29}{60} + y + \frac{1}{15} = 0'75 \rightarrow y = 0'75 - \frac{29}{60} - \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$

El diagrama de Venn del problema queda:

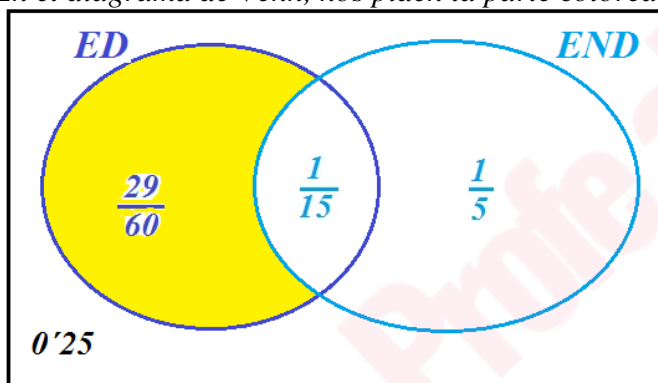


Resolvamos cada uno de los apartados del problema,

a) Se pide $P(ED \cap END) = \frac{1}{15}$

b) Se pide $P(\text{practique solo } ED)$.

En el diagrama de Venn, nos piden la parte coloreada:



Luego, $P(\text{practique solo } ED) = \frac{29}{60}$

c) ¿Son independientes ED y END ?

Estos sucesos serán independientes si se cumple que $P(ED \cap END) = P(ED) \cdot P(END)$

Sabemos que $P(ED) = 0'55$

Del diagrama de Venn, $P(END) = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \rightarrow P(ED) \cdot P(END) = 0'55 \cdot \frac{4}{15} = \frac{11}{75}$

Por otro lado, ya calculamos $P(ED \cap END) = \frac{1}{15} = \frac{5}{75}$

Por tanto, $P(ED \cap END) = \frac{5}{75} \neq \frac{11}{75} = P(ED) \cdot P(END)$

Solución: los sucesos ED y END no son independientes.

Problema 1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz X que satisface la ecuación $A X - B C X = 3 C$.

b) Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A .

Solución:

a) ¿Matriz X / $A X - B C X = 3 C$?

$A X - B C X = 3 C$, sacando factor X por la derecha,

$(A - B C) X = 3 C$, si existe $(A - B C)^{-1}$ entonces $X = (A - B C)^{-1} 3 C$

Calculemos $A - B C$,

$$\begin{aligned} A - B C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0 \rightarrow \exists (A - B C)^{-1}$

Cálculo de $(A - B C)^{-1}$,

$$\begin{aligned} A - B C &= \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\quad \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $(A - B C)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Cálculo de la matriz X ,

$$X = (A - B C)^{-1} 3 C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -8 & 28 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A^t + B)^{-1}$.

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6 \neq 0 \rightarrow \exists (A^t + B)^{-1}$

Cálculo de $(A^t + B)^{-1}$,

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } (A^t + B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } (A^t + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Tu Prof te al Rescate

Problema 2. Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías reveladas por minuto viene dado por la función $f(x)$, donde x es la antigüedad de la máquina en años.

$$f(x) = \begin{cases} 15,5 - 1,1x & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5x+45}{x+2} & x > 5 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $[0, +\infty[$.
- Comprueba que el número de fotografías reveladas por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justifica que si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.
- ¿Es cierto que la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto? ¿Por qué?

Solución:

a) Continuidad de $f(x)$ en $[0, +\infty[$.

Para $0 \leq x < 5$, $f(x) = 15,5 - 1,1x$, polinomio luego continua.

Para $x > 5$, $f(x) = \frac{5x+45}{x+2}$, esta función no se puede calcular para $x+2=0$, $x=-2 \notin]5, +\infty[$. Por tanto, para $x > 5$ el cociente siempre se puede calcular, luego continua.

Veamos para $x=5$,

$$a) f(5) = 15,5 - 1,1 \cdot 5 = 10$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (15,5 - 1,1x) = 10 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{5x+45}{x+2} = \frac{5 \cdot 5 + 45}{5+2} = \frac{70}{7} = 10 \end{cases} = 10$$

$$c) f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, $f(x)$ es continua en $x=5$.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[0, +\infty[$.

b) Estudiemos la monotonía de $f(x)$.

Tenemos en cuenta que $f(x)$, por el apartado a), es continua en $[0, +\infty[$.

Calculamos $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1,1 & 0 < x < 5 \\ \frac{5(x+2) - (5x+45) \cdot 1}{(x+2)^2} & x > 5 \end{cases} = \begin{cases} -1,1 & 0 < x < 5 \\ \frac{5x+10-5x-45}{(x+2)^2} & x > 5 \end{cases} = \begin{cases} -1,1 & 0 < x < 5 \\ \frac{-35}{(x+2)^2} & x > 5 \end{cases}$$

Entre 0 y 5, $f'(x)$ es negativa

A partir de 5, $f'(x)$ es un cociente cuyo denominador está elevado al cuadrado (positivo) y el numerador es negativo, luego $f'(x)$ es negativa.

Por tanto $f'(x)$ es negativa en $]0, 5[\cup]5, +\infty[$. Por tanto $f(x)$ es decreciente en su dominio.

Luego, podemos concluir que el número de fotografías decrece con la antigüedad de la máquina.

Para justificar que si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto, realizamos los siguientes cálculos:

$$f(5) = \{\text{obtenido en a)}\} = 10 \text{ y como la función } f(x) \text{ es decreciente, para } x > 5 \rightarrow f(x) < 10$$

Por tanto, si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.

c) ¿Es cierto que la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto? ¿Por qué?

$$\text{Calculemos } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+45}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$$

Como $f(x)$ es decreciente y su límite es 5, esto quiere decir que el número de fotografías que revela la máquina, a medida que pasa el tiempo, se va acercando a 5 pero se mantiene por encima de 5. Es decir, la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto.

Otra forma de resolver los apartados b) y c) es representar gráficamente la función.

Primera rama

x	$15'5 - 1'1x$
0	15'5
5	$15'5 - 1'1 \cdot 5 = 10$

Segunda rama

x	$\frac{5x+45}{x+2}$
5	$\frac{10}{9} = 1'1$
10	$\frac{95}{12} = 7'9$
15	$\frac{120}{17} = 7'1$
20	$\frac{145}{22} = 6'6$

es una hipérbola con
asíntota vertical

$$x+2=0$$

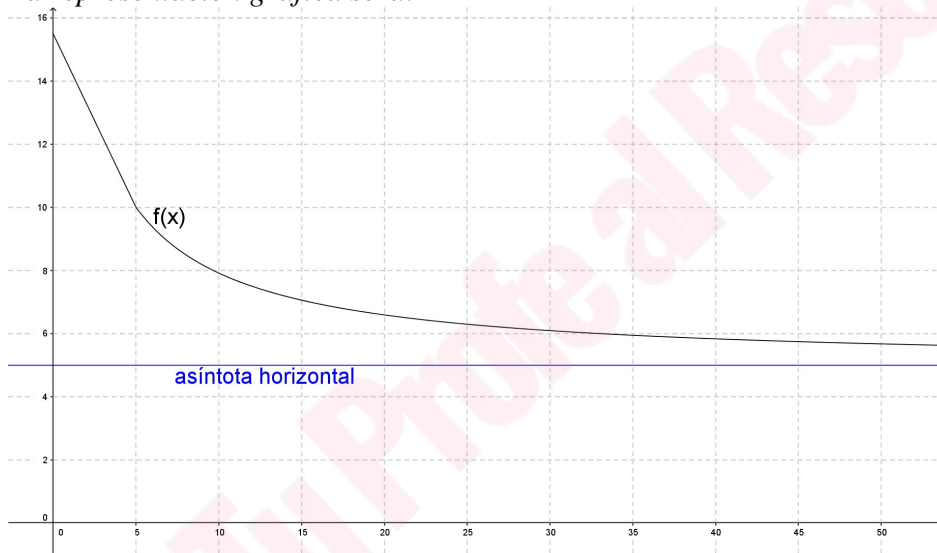
$$x=-2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+45}{x+2} = \frac{-35}{0} = \infty \rightarrow x=-2 \text{ es a.v. } \{ \notin \} 5, +\infty [$$

asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+45}{x+2} = \{ \text{calculado antes} \} = 5 \rightarrow y=5 \text{ es a.h.}$$

La representación gráfica será:



A partir de la representación se comprueba que:

- El número de fotografías reveladas por minuto decrece con la antigüedad de la máquina.
- Si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.
- La máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto.

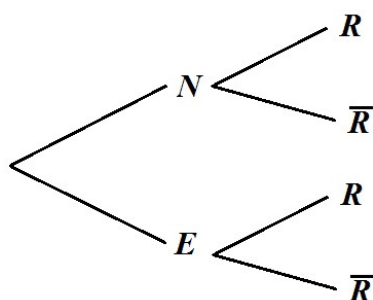
Problema 3. En un aeropuerto, $1/3$ de los aviones que vienen del extranjero lo hacen con retraso, mientras que si proceden del propio país lo hacen con retraso el 5%. Si del extranjero vienen el 25% de los vuelos, se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue con retraso?
- Si un avión seleccionado al azar ha llegado sin retraso, ¿cuál es la probabilidad de que venga del extranjero?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue a su hora o provenga del extranjero?

Solución:

Llamando E = avión que vienen del extranjero
 N = avión que procede del mismo país
 R = el avión llega con retraso

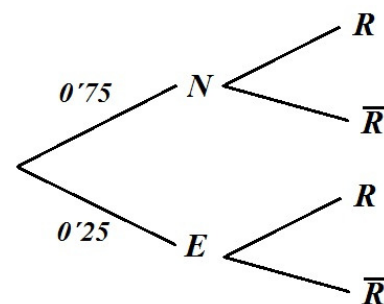
Los datos del problema podemos resumirlos en el siguiente árbol,



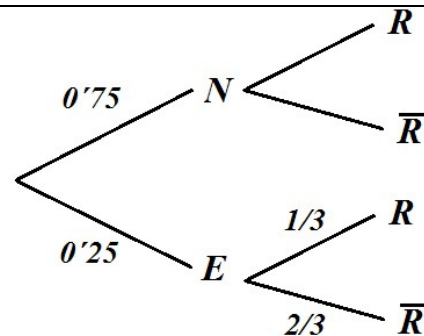
Calculemos la probabilidad de cada una de las ramas.

Sabemos, del enunciado, que

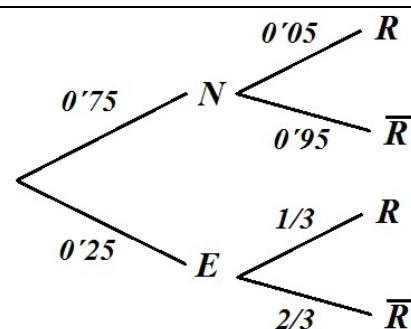
“del extranjero vienen el 25% de los vuelos” $\rightarrow P(E) = 0.25$ y, como los aviones provienen del extranjero o del propio país, $P(N) = 1 - 0.25 = 0.75$:



“ $1/3$ de los aviones que vienen del extranjero lo hacen con retraso”, por lo que, de los aviones que vienen del extranjero no llegan con retraso: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$:



“de los aviones que proceden del propio país lo hacen con retraso el 5%”, por lo que, de los aviones que proceden del propio país no llegan con retraso el 95%:



a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue con retraso?.

$$\text{Se pide } P(R) = 0.75 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot \frac{1}{3} = 0.1208$$

b) Si un avión seleccionado al azar ha llegado sin retraso, ¿cuál es la probabilidad de que venga del extranjero?.

$$\text{Se pide } P\left(\frac{E}{\bar{R}}\right) = \frac{P(E \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0.25 \cdot \frac{2}{3}}{1 - P(R)} = \frac{0.25 \cdot \frac{2}{3}}{1 - 0.1208} = \frac{0.25 \cdot \frac{2}{3}}{0.8792} = 0.1896$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue a su hora o provenga del extranjero?.

$$\text{Se pide } P(\bar{R} \cup E) = \{\text{a partir del árbol}\} = P(\bar{R} \cap N) + P(E) = 0.75 \cdot 0.95 + 0.25 = 0.9625$$

Otra forma de resolverlo es:

$$P(\bar{R} \cup E) = \{\text{por probabilidad de la unión}\} = P(\bar{R}) + P(E) - P(\bar{R} \cap E) = 0.8792 + 0.25 - 0.25 \cdot \frac{2}{3} = 0.9625$$

$$P(\bar{R}) = \{\text{calculada en b)}\} = 0.8792$$

$$P(E) = \{\text{del enunciado}\} = 0.25$$

$$P(\bar{R} \cap E) = \{\text{del árbol}\} = 0.25 \cdot \frac{2}{3}$$