Aula sobre Números Complexos

Objetivo da Aula

Nesta aula, vamos explorar o conceito de números complexos, uma extensão crucial dos números reais que permite a resolução de equações anteriormente insolúveis, além de proporcionar uma nova dimensão de análise matemática. Veremos como esses números podem ser representados no plano complexo (ou plano de Argand) e discutiremos suas propriedades, operações, e formas de representação, incluindo a forma trigonométrica e a notação avançada em termos de $cis(\theta)$.

1. O que são Números Complexos?

Em matemática, muitas vezes nos deparamos com equações de segundo grau que não possuem soluções reais. Por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem soluções no conjunto dos números reais, pois não existe um número real cujo quadrado seja negativo. A introdução dos números complexos resolve esse impasse, permitindo a existência de soluções para equações como essa e expandindo o conjunto dos números reais para incluir números da forma $a + bi$, onde i é a unidade imaginária, definida como $i^2 = -1$.

Os números complexos podem ser vistos como uma expansão dos números reais que permite soluções para equações que anteriormente não tinham. Eles são fundamentais na matemática e surgem em diversas áreas, como na física, na engenharia e na teoria de controle.

Importância: Antes da introdução dos números complexos, equações como $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4 = 0$, e $x^2 - 2x + 5 = 0$ não tinham soluções no campo dos números reais porque o discriminante (Δ) dessas equações era negativo. Com o conceito de números complexos, essas equações agora possuem soluções, como $x = \pm i$ para a primeira equação e $x = \pm 2i$ para a segunda.

Além disso, os números complexos podem ser representados graficamente no plano complexo, onde a parte real e a parte imaginária de $z = a + bi$ são vistas como coordenadas de um ponto em um sistema de eixos, discutido mais à frente nesta aula.

Unidade Imaginária i: A unidade imaginária i possui as seguintes propriedades:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

Essas potências de i repetem-se ciclicamente, formando um padrão útil para simplificar expressões envolvendo i.

Exemplo: Para calcular i^5, note que $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$. De maneira geral, i^n pode ser simplificado observando o resto da divisão de n por 4.

—

2. Operações com Números Complexos

Entender como realizar operações básicas com números complexos é essencial para manipular e trabalhar com essas entidades matemáticas em problemas mais avançados. A seguir, veremos como realizar adição, subtração, multiplicação e outras operações importantes.

2.1 Adição e Subtração

Adição: Para adicionar dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, somamos as partes reais e as partes imaginárias separadamente:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo 1:

$$(3 + 2i) + (1 - 4i) = 4 - 2i$$

Neste exemplo, somamos as partes reais $3 + 1 = 4$ e as partes imaginárias $2i - 4i = -2i$, resultando em $4 - 2i$.

Subtração: Para subtrair z_2 de z_1, subtraímos as partes reais e as partes imaginárias separadamente:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo 2:

$$(3 + 2i) - (1 - 4i) = 2 + 6i$$

Aqui, subtraímos as partes reais $3-1 = 2$ e as partes imaginárias $2i-(-4i) = 6i$, resultando em $2 + 6i$.

2.2 Multiplicação

Para multiplicar dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, utilizamos a propriedade distributiva, multiplicando cada termo de z_1 por cada termo de z_2, lembrando que $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo 3:

$$(2 + 3i) \cdot (1 + 4i) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 4) + (2 \cdot 4 + 3 \cdot 1)i = -10 + 11i$$

No exemplo acima, multiplicamos as partes reais e imaginárias, lembrando que $i^2 = -1$, o que nos dá o resultado $-10 + 11i$.

2.3 Conjugado e Módulo

Conjugado: O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é $\overline{z} = a - bi$. O conjugado reflete o número complexo em relação ao eixo real no plano complexo. O conjugado de um número complexo é útil em operações como divisão e em certas transformações geométricas.

Exemplo 4: Para $z = 3 + 4i$:

$$\overline{z} = 3 - 4i$$

Módulo: O módulo de $z = a + bi$ é a distância do ponto z até a origem no plano complexo e é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo 5: Para $z = 3 + 4i$:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

O módulo $|z|$ representa a distância do ponto z (3,4) à origem (0,0) no plano complexo.

2.4 Divisão de Números Complexos

Para dividir dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador e simplificamos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Exemplo 6: Divida $z_1 = 1 + i$ por $z_2 = 1 - i$:

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 + 2i - 1}{1 + 1} = \frac{2i}{2} = i$$

Neste exemplo, ao multiplicar pelo conjugado, eliminamos o termo imaginário do denominador, obtendo um resultado puramente imaginário.

—

3. Representação no Plano Complexo e Forma Trigonométrica

Os números complexos podem ser representados graficamente no plano complexo (ou plano de Argand), onde:

- O eixo horizontal (eixo real) representa a parte real a.
- O eixo vertical (eixo imaginário) representa a parte imaginária b.

Visualizar os números complexos dessa forma é extremamente útil para entender a magnitude (módulo) e a direção (argumento) de números complexos.

Exemplo: O número complexo $z = 3 + 4i$ pode ser representado como o ponto $(3, 4)$ no plano complexo.

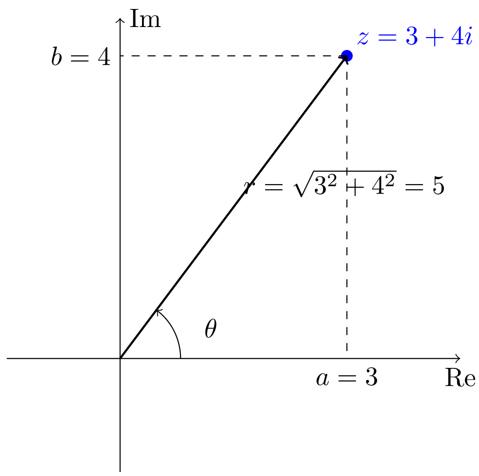

Figure 1: Representação do número complexo $z = 3 + 4i$ no plano complexo.

3.1 Forma Trigonométrica

Qualquer número complexo $z = a + bi$ também pode ser expresso na forma trigonométrica:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

onde:

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z.
- θ é o argumento de z, que é o ângulo que o segmento que une z à origem faz com o eixo real positivo, dado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

A forma trigonométrica é particularmente útil quando se realiza a multiplicação ou divisão de números complexos, pois simplifica as operações.

Exemplo 7: Para $z = 1 + i$:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, a forma trigonométrica é:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo 8: Converta $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ para a forma trigonométrica.
Solução: Primeiro, calcule o módulo r:

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

Agora, calcule o argumento θ:

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Portanto, a forma trigonométrica é:

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Importância: A forma trigonométrica é útil para multiplicar e dividir números complexos, além de encontrar potências e raízes de números complexos usando a Fórmula de De Moivre.

3.2 Raízes de Números Complexos

As raízes quadradas de um número complexo z podem ser encontradas utilizando a forma trigonométrica. As duas raízes quadradas de z são dadas por:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{e} \quad \sqrt{z} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{2}\right)$$

Exemplo 9: Encontre as raízes quadradas de $z = 4i$ usando a forma trigonométrica.
Solução: Primeiro, escrevemos z na forma trigonométrica. O módulo r é:

$$r = |4i| = 4$$

O argumento θ é:

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.
As raízes quadradas de z são:

$$\sqrt{z} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1 + i)$$

e

$$\sqrt{z} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}(1 + i)$$

—

4. Notação Avançada: $cis(\theta)$

A notação $cis(\theta)$ é uma maneira abreviada de expressar números complexos na forma trigonométrica.

Definição:

$$cis(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Portanto, a forma trigonométrica de um número complexo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ pode ser expressa como:

$$z = r \cdot cis(\theta)$$

Essa notação simplifica a escrita e manipulação de números complexos em suas operações.

Exemplo 10: Escreva o número complexo $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ usando a notação $cis(\theta)$.

Solução:

$$z = 4 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Propriedades do $cis(\theta)$:

- **Multiplicação de Números Complexos:** Se $z_1 = r_1 cis(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 cis(\theta_2)$, então:

  $$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$$

  Exemplo 11: Multiplique $z_1 = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

  Solução:

  $$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cis\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

- **Divisão de Números Complexos:** Se $z_1 = r_1 cis(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 cis(\theta_2)$, então:

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2)$$

  Exemplo 12: Divida $z_1 = 4 \cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $z_2 = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

  Solução:

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} \cdot cis\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

- **Fórmula de De Moivre:** Para um número complexo $z = r \cdot cis(\theta)$, a n-ésima potência é dada por:

  $$z^n = r^n \cdot cis(n\theta)$$

  Exemplo 13: Encontre $(1+i)^4$ usando a Fórmula de De Moivre.

  Solução: Primeiro, escreva $1 + i$ na forma trigonométrica:

  $$1 + i = \sqrt{2} \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Agora, eleve à quarta potência:

$$\left(\sqrt{2} \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot cis\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot cis\left(\pi\right) = -4$$

Importância: Embora seja uma notação avançada, a notação $cis(\theta)$ simplifica a manipulação de números complexos em sua forma trigonométrica, especialmente ao trabalhar com potências e raízes.

—

5. Principais Tópicos para o Vestibular

- **Operações Básicas:**
  - Adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos.
  - Conjugado e módulo de números complexos.
- **Resolução de Equações:**
  - Resolver equações quadráticas com raízes complexas.
  - Encontrar as raízes de números complexos.
- **Representação Geométrica:**
  - Representação de números complexos no plano de Argand.
  - Interpretação geométrica das operações com números complexos.
- **Notação $cis(\theta)$:**
  - Manipulação de números complexos utilizando a notação $cis(\theta)$.
  - Aplicações da Fórmula de De Moivre.

—

6. Exercícios Práticos

- **Operações com Números Complexos:**
  - Calcule $(2 + 3i) + (4 - i)$ e $(2 + 3i) \times (4 - i)$.
- **Conjugado e Módulo:**
  - Determine o conjugado e o módulo de $z = 5 - 12i$.
- **Raízes de Números Complexos:**
  - Encontre as raízes quadradas de $z = 4i$.
- **Resolução de Equações:**

  - Resolva $z^2 + 2z + 5 = 0$ no conjunto dos números complexos.

- **Representação no Plano Complexo:**
  - Represente os números $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = -2 + 5i$ no plano complexo e determine a distância entre eles.

Conclusão

Os números complexos são uma extensão natural dos números reais e fornecem uma maneira de resolver problemas que não têm soluções no conjunto dos reais. Entender as operações básicas, a representação gráfica, a forma trigonométrica, a notação $cis(\theta)$ e as propriedades dos números complexos é essencial para enfrentar questões mais complexas em vestibulares e estudos avançados em matemática.