

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2009 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los cuatro problemas de cada bloque para abarcar la propuesta completa.

Bloque A

Problema A1 · Mezclas de fruta y beneficio

Sean x e y los números de bolsas A y B. Las existencias imponen

$$x + 2y \leq 500, \quad 2x + y \leq 400, \quad y \leq 230, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio es $B = 2,5x + 3y$. Como es una función lineal, su máximo en la región factible se alcanza en un vértice. Las intersecciones factibles son $(0, 0)$, $(0, 230)$, $(200, 0)$, $(40, 230)$ y $(100, 200)$. Evaluamos:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 230)$	$(200, 0)$	$(40, 230)$	$(100, 200)$
B (€)	0	690	500	790	850

Preparará 100 bolsas A y 200 bolsas B; el beneficio máximo será 850 €.

Problema A2 · Resolución de un sistema

Resolvemos el sistema

$$x + y - z = 2, \quad 2x + z = 3, \quad x + 5y - 7z = 4.$$

La segunda ecuación da $z = 3 - 2x$. Al sustituirla en la primera, $y = 5 - 3x$. En la tercera:

$$x + 5(5 - 3x) - 7(3 - 2x) = 4 \implies 4x = 6,$$

por lo que $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ y $z = 0$. El enunciado pregunta si la solución puede tener precisamente $z = 0$; estos valores lo verifican en las tres ecuaciones.

$$(x, y, 0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Bloque B

Problema B1 · Continuidad y área

a) Cada rama es polinómica, por lo que solo revisamos las uniones $x = -1$ y $x = 4$. En $x = -1$, el valor y límite por la derecha son -2 , mientras que el límite por la izquierda vale 1 ; hay discontinuidad de salto. En $x = 4$, la rama central tiende a 3 y la rama derecha, que define el valor de la función, vale $4^2 - 2 \cdot 4 - 6 = 2$. También hay salto.

f es continua en $(-2, 6) \setminus \{-1, 4\}$; tiene saltos en -1 y 4 .

b) Entre 1 y 4 se tiene $f(x) = x - 1 \geq 0$, y entre 4 y 5 , $f(x) = x^2 - 2x - 6 > 0$. Por eso el área coincide con la integral de la función, separada en $x = 4$ donde cambia la expresión:

$$A = \int_1^4 (x - 1) dx + \int_4^5 (x^2 - 2x - 6) dx = \frac{9}{2} + \frac{16}{3} = \frac{59}{6}.$$

$$A = \frac{59}{6} \text{ unidades}^2.$$

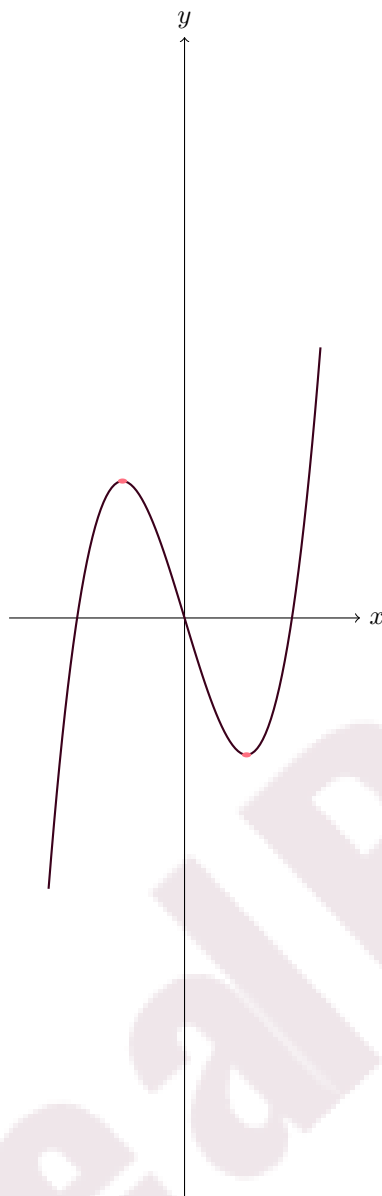
Problema B2 · Función cúbica

La función $f(x) = x^3 - 6x$ es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Sus cortes con el eje X salen de $x(x^2 - 6) = 0$: son $(-\sqrt{6}, 0)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{6}, 0)$; el corte con el eje Y también es $(0, 0)$. Al ser polinómica, no tiene asíntotas verticales; como $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, tampoco tiene asíntotas horizontales.

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

La derivada es positiva para $x < -\sqrt{2}$ y $x > \sqrt{2}$, y negativa entre ambos puntos. Por ello hay máximo relativo en $x = -\sqrt{2}$ y mínimo relativo en $x = \sqrt{2}$:

$$f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}, \quad f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}.$$



Máximo local $(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, mínimo local $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$.

Bloque C

Problema C1 · Sucesos

Sean A y B los sucesos «consume A» y «consume B». La probabilidad de no consumir ninguno es 0,25, así que $P(A \cup B) = 0,75$. Como $P(A) = 0,50$ y $P(B) = 0,40$,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,15.$$

Solo consume uno de los productos con probabilidad $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,60$. Finalmente, $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A)$.

$$P(A \cap B) = 0,15, \quad P(\text{solo uno}) = 0,60, \quad P(B | A) = 0,30.$$

Problema C2 · Opinión electoral

Hay un 52% de hombres y un 48% de mujeres. Si una mujer responde A con probabilidad 0,70, responde B con probabilidad 0,30; un hombre responde B con probabilidad 0,35. Luego

$$P(M \cap B) = 0,48 \cdot 0,30 = 0,144, \quad P(H \cap B) = 0,52 \cdot 0,35 = 0,182.$$

a) Aplicamos Bayes para invertir la condición:

$$P(M | B) = \frac{0,144}{0,144 + 0,182} = \frac{72}{163} \approx 0,4417.$$

b) Primero calculamos $P(A) = 0,48 \cdot 0,70 + 0,52 \cdot 0,65 = 0,674$. Entonces

$$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,48 + 0,674 - 0,336 = 0,818.$$

$$P(M | B) = \frac{72}{163} \approx 0,4417, \quad P(M \cup A) = 0,818.$$

Bloque D

Problema D1 · Rendimiento de un producto

El tiempo cumple $x \geq 0$ y $1 + x^2 > 0$, así que el dominio contextual es $[0, \infty)$. Para estudiar su evolución usamos el signo de la derivada:

$$f(x) = 8,5 + \frac{3x}{1 + x^2}, \quad f'(x) = \frac{3(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

El denominador es positivo. La derivada es positiva si $0 \leq x < 1$ y negativa si $x > 1$. El rendimiento alcanza el máximo en $x = 1$:

$$f(1) = 8,5 + \frac{3}{2} = 10.$$

Al inicio $f(0) = 8,5$; para $x > 0$, $3x/(1 + x^2) > 0$, por lo que el rendimiento nunca baja de su valor inicial. Además, tiende a 8,5 desde arriba.

Crece hasta el año 1, decrece después y su máximo es 10; nunca queda por debajo de 8,5.

Problema D2 · Extremos de una función cúbica

La función es polinómica y su dominio es todo $\mathbb{R}$. Para los extremos relativos resolvemos

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2) = 0.$$

El signo pasa de positivo a negativo en $x = -2$ y de negativo a positivo en $x = 2$. Los valores son $f(-2) = 23$ y $f(2) = -9$.

Máximo relativo $(-2, 23)$, mínimo relativo $(2, -9)$.

En cada intervalo cerrado, comparamos estos puntos críticos con los extremos del intervalo:

Intervalo	Valores relevantes				Extremos absolutos
$[-3, 3]$	$f(-3) = 16$	$f(-2) = 23$	$f(2) = -9$	$f(3) = -2$	max 23 en -2 ; min -9 en 2
$[-4, 4]$	$f(-4) = -9$	$f(-2) = 23$	$f(2) = -9$	$f(4) = 23$	max 23 en $-2, 4$; min -9 en $-4, 2$
$[-5, 5]$	$f(-5) = -58$	$f(-2) = 23$	$f(2) = -9$	$f(5) = 72$	max 72 en 5 ; min -58 en -5

Los extremos absolutos en los tres intervalos son los indicados en la tabla.