

Convocatoria extraordinaria de 2024 · Reserva

Resolución de los ocho ejercicios con justificación matemática.

Ejercicio 1

Si los lados del rectángulo son $a, b > 0$, cada diagonal mide $\sqrt{a^2 + b^2}$, por lo que el producto de las dos diagonales es $a^2 + b^2$. Como $ab = 25$,

$$a^2 + b^2 \geq 2ab = 50,$$

con igualdad exactamente cuando $a = b$. Como $ab = 25$, se tiene $a = b = 5$. Las dimensiones son 5 cm por 5 cm.

Ejercicio 2

La división del numerador por el denominador da

$$f(x) = ax - ab + \frac{(a + 1 + ab^2)x + (3ab - 1)}{x^2 + bx - 3}.$$

La fracción tiende a cero en el infinito; así, la asíntota oblicua es $y = ax - ab$. Igualándola a $y = x - 2$ obtenemos $a = 1, b = 2$.

Para el apartado b), se sustituyen los valores que se dan allí, $a = 0$ y $b = 2$:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3} \quad (x \neq 1, -3).$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable, no una asíntota vertical; en $x = -3$ el límite diverge. La única asíntota vertical es $x = -3$.

Ejercicio 3

Integramos cada rama en su intervalo:

$$\int_{-\pi}^0 (1 - e^x) dx = [x - e^x]_{-\pi}^0 = \pi + e^{-\pi} - 1,$$

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi} = -2.$$

Sumando ambas contribuciones,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi + e^{-\pi} - 3.$$

Ejercicio 4

Tomamos $t = \sqrt{x - 1}$, de modo que $x - 1 = t^2$ y $dx = 2t dt$. Entonces

$$\int (x - 1)^2 \ln \left(\frac{\sqrt{x - 1}}{2} \right) dx = \int 2t^5 \ln \left(\frac{t}{2} \right) dt = \frac{t^6}{3} \ln \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{t^6}{18} + C.$$

Volviendo a x ,

$$F(x) = \frac{(x - 1)^3}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{x - 1}}{2} \right) - \frac{(x - 1)^3}{18} + C.$$

En $x = 5$, el logaritmo vale cero. La condición $F(5) = -7/2$ da $C = 1/18$. La primitiva es

$$F(x) = \frac{(x - 1)^3}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{x - 1}}{2} \right) - \frac{(x - 1)^3}{18} + \frac{1}{18}.$$

Ejercicio 5

Para el apartado a), la matriz del determinante se obtiene de las filas de A mediante $R_1 \mapsto R_1 - R_3$, un intercambio de las dos últimas filas y $R_3 \mapsto R_2 + R_3$; la operación de suma no altera el determinante y el intercambio cambia su signo. Por tanto, como $\det A = 5$, el determinante pedido es $\boxed{-5}$. Para el apartado b), el producto $BA = C$ da

$$x + 3y + z = 3, \quad y + z = 0, \quad 2y + 2z = 0.$$

La tercera ecuación repite la segunda. Sin imponer otra condición, las soluciones son $(x, y, z) = (3 - 2t, t, -t)$. Sin embargo, para cualquiera de ellas $\det A = -6$, no 5. Así que, si se exige simultáneamente el dato $\det A = 5$ del primer apartado, no existe ningún triple que cumpla todas las condiciones. Si el segundo apartado se interpreta independientemente, queda la familia indicada.

Ejercicio 6

El sistema homogéneo equivale a $(M - mI)X = 0$. Para que tenga soluciones no triviales, m debe ser un valor propio de M :

$$\det(M - mI) = -m(m - 2)^2.$$

Los valores son $m = 0$ y $m = 2$. En ambos casos el rango de la matriz es $2 < 3$, por lo que el sistema es compatible indeterminado. Para $m = 2$, el espacio nulo está generado por $(1, 0, 1)$; así, las soluciones son

$$\boxed{(x, y, z) = t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Ejercicio 7

Parametrizamos r mediante $(t, t - a, 2t - 1)$ y s como la intersección de los planos dados. Al imponer las dos ecuaciones de s en un punto de r , la segunda da $t = 1$ y la primera entonces exige $a = -1$. El punto de corte es $(1, 2, 1)$. Para $a = -1$, un director de r es $u = (1, 1, 2)$. Un director de s , producto vectorial de los normales $(1, -2, 0)$ y $(1, 0, 1)$ de sus planos, es $v = (-2, -1, 2)$. El vector $u \times v = (4, -6, 1)$ es perpendicular a ambas rectas. Por pasar las rectas por el punto de corte, la perpendicular común es

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(4, -6, 1)}.$$

Ejercicio 8

El producto escalar es $u \cdot v = 3a - 2$ y ambos módulos valen $\sqrt{a^2 + 5}$. La condición del ángulo es

$$\frac{3a - 2}{a^2 + 5} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

que equivale a $(a - 3)^2 = 0$. Así, $a = 3$. Además, $(u \times v) \cdot u = 0$, porque el producto vectorial es perpendicular a u . Por ello,

$$((u \times v) - v) \cdot u = -v \cdot u.$$

La ortogonalidad requerida equivale a $3a - 2 = 0$, de donde $\boxed{a = 2/3}$.