

Problema 1. A. Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

- a) ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)
 b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

Solución:

Llamando: x = número de excursiones a la montaña
 y = número de excursiones a la playa

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº excursiones	Autobuses	guías	Beneficio
montaña	x	2 /excursión	2 /excursión	700€/excursión
playa	y	2 /excursión	1 /excursión	500€/excursión
Disponibilidad		10 autobuses	8 guías	

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías $\rightarrow 2x + 2y \leq 10 \rightarrow x + y \leq 5$

Cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía $\rightarrow 2x + y \leq 8$

Como las variables x e y representan número de unidades deben ser números naturales.

El beneficio viene dada por la función: $z = 700x + 500y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar } z = 700x + 500y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 5$

$$x + y = 5$$

x	y
0	5
5	0

¿(0,0) cumple?

$$0 + 0 \leq 5 \quad \text{Sí}$$

(b) $2x + y \leq 8$

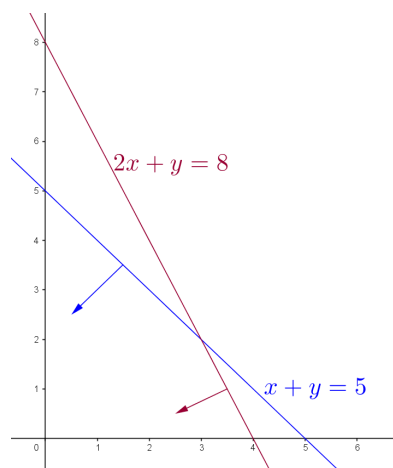
$$x + 2y = 8$$

x	y
0	8
4	0

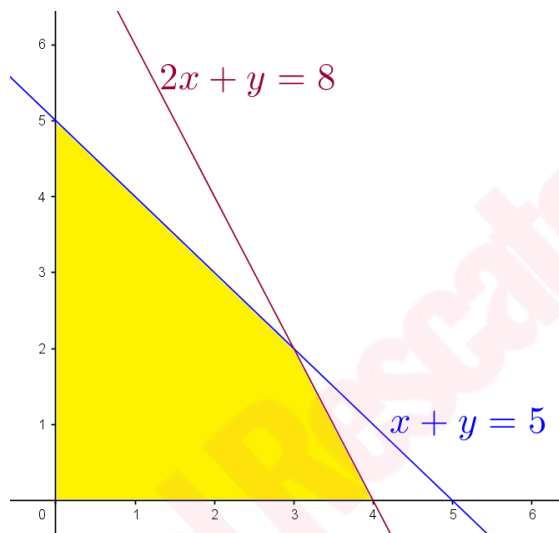
¿(0,0) cumple?

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 8 \quad \text{Sí}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son $A(0, 0)$, $B(0, 5)$ y $D(4, 0)$.

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} x + y = 5 & -1^a \\ 2x + y = 8 & 2^a \end{cases} \begin{cases} -x - y = -5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Sumando: $x = 3$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $3 + y = 5$; $y = 5 - 3$; $y = 2 \rightarrow C(3, 2)$

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 700x + 500y$	
$0, 0$	$700 \cdot 0 + 500 \cdot 0 = 0$	
$0, 5$	$700 \cdot 0 + 500 \cdot 5 = 2500$	
$3, 2$	$700 \cdot 3 + 500 \cdot 2 = 3100$	máximo
$4, 0$	$700 \cdot 4 + 500 \cdot 0 = 2800$	

El máximo se alcanza en el punto $(3, 2)$

Por tanto,

- Tiene que organizar 3 excursiones a la montaña y 2 a la playa para obtener el máximo beneficio posible.
- El beneficio máximo será de 3100€.

Problema 1. B. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz AD es diagonal. (0,5 puntos)

Solución:

a) ¿Matriz X ? / $2XA + B^t C = I$.

$$\begin{array}{l} B \text{ es } 2 \times 3, \quad B^t \text{ es } 3 \times 2 \\ C \text{ es } 2 \times 3 \end{array} \rightarrow B^t C \text{ es } 3 \times 3$$

$$2XA + B^t C = I \rightarrow 2XA = I - B^t C;$$

$$\begin{array}{l} \text{Si existe } A^{-1} \rightarrow \text{multiplicando por la derecha por } A^{-1}: \quad 2XA A^{-1} = (I - B^t C) A^{-1} \\ \{\text{como } A A^{-1} = I\} \rightarrow 2X = (I - B^t C) A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(I - B^t C) A^{-1} \end{array}$$

Cálculos:

* A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Cálculo de la inversa de A ,

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \\ \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$* X = \frac{1}{2}(I - B^t C) A^{-1}$$

$$B^t C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 & 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 & 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - B^t C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I - B^t C) A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 + \frac{3}{2} & \frac{-8}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{6} \\ 1 & 1 + \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ 4 & 4 - \frac{1}{2} & \frac{-4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \frac{19}{2} & \frac{-5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} \\ 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente: } X = \frac{1}{2} (I - B^t C) A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & \frac{19}{2} & \frac{-5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} \\ 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$

b) ¿z? / A D es diagonal.

La matriz A D es diagonal cuando todos sus elementos fuera de la diagonal principal son 0.

$$A D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 + 2z \\ 0 & 0 & 1 - 2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A D \text{ será diagonal cuando: } \begin{cases} -1 + 2z = 0 \\ 1 - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z = 1 \\ 1 = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow z = \frac{1}{2}$$

Solución: la matriz A D es diagonal para $z = 1/2$.

Problema 2. A. Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste D_A tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_A(x)$. Por su parte, el desgaste D_B para un neumático B tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_B(x)$.

$$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \quad y \quad D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$$

- Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)
- Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)
- Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

Solución:

Del enunciado sabemos que:

$$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \quad 0 \leq x \leq 50 \quad y \quad D_B(x) = \frac{x^2}{3000} \quad 0 \leq x \leq 50, \quad \text{siendo } x \text{ meses de uso.}$$

a) ¿x? / $D_A(x) = D_B(x)$

$$\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} = \frac{x^2}{3000}; \quad \frac{30 + 29x}{3000} = \frac{x^2}{3000}; \quad 30 + 29x = x^2; \quad x^2 - 29x - 30 = 0 \rightarrow$$

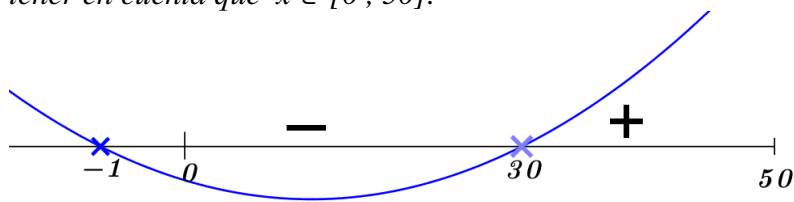
$$\rightarrow x = \frac{-(-29) \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \frac{29 \pm 31}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{29 + 31}{2} = 30 \in [0, 50] \\ x_2 = \frac{29 - 31}{2} = -1 \notin [0, 50] \end{cases}$$

Solución: el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos tras 30 meses de uso.

b) ¿x? / $D_A(x) < D_B(x)$

$$\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} < \frac{x^2}{3000}; \quad \frac{30 + 29x}{3000} < \frac{x^2}{3000}; \quad 30 + 29x < x^2; \quad x^2 - 29x - 30 > 0$$

Resolvemos la inecuación de 2º grado mediante la representación de $y = x^2 - 29x - 30$ que es una parábola con coeficiente de x^2 positivo y raíces (obtenidas en el apartado anterior) -1 y 30 . Debemos tener en cuenta que $x \in [0, 50]$.



Por lo tanto $D_A(x) < D_B(x)$ para $30 < x \leq 50$ y $D_A(x) > D_B(x)$ para $0 \leq x < 30$

Solución: el desgaste es menor para el neumático A en el intervalo de meses $(30, 50]$ y el desgaste es menor para el neumático B en el intervalo de meses $[0, 30)$

c) *Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A.*

$$D_A(x) < D_B(x) \text{ para } 30 < x \leq 50$$

$$\text{El cálculo del área pedida será: } X = \int_{30}^{50} [D_B(x) - D_A(x)] dx$$

$$D_B(x) - D_A(x) = \frac{x^2}{3000} - \left(\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \right) = \frac{x^2}{3000} - \frac{1}{100} - \frac{29x}{3000} = \frac{x^2 - 30 - 29x}{3000} = \frac{x^2 - 29x - 30}{3000}$$

$$\begin{aligned} X &= \int_{30}^{50} \frac{x^2 - 29x - 30}{3000} dx = \frac{1}{3000} \int_{30}^{50} (x^2 - 29x - 30) dx = \frac{1}{3000} \left[\frac{x^3}{3} - 29 \frac{x^2}{2} - 30x \right]_{30}^{50} = \\ &= \frac{1}{3000} \left[\left(\frac{50^3}{3} - 29 \frac{50^2}{2} - 30 \cdot 50 \right) - \left(\frac{30^3}{3} - 29 \frac{30^2}{2} - 30 \cdot 30 \right) \right] = \frac{1}{3000} \left[\frac{11750}{3} - (-4950) \right] = \frac{133}{45} \approx 2'9556 \end{aligned}$$

Solución: *el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A es $\frac{133}{45}$ u.a. $\approx 2'9556$ u.a.*

Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático B

$$D_B(x) < D_A(x) \text{ para } 0 \leq x < 30$$

$$\text{El cálculo del área pedida será: } Y = \int_0^{30} [D_A(x) - D_B(x)] dx$$

$$D_A(x) - D_B(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} - \frac{x^2}{3000} = \frac{30 + 29x - x^2}{3000}$$

$$\begin{aligned} Y &= \int_0^{30} \frac{30 + 29x - x^2}{3000} dx = \frac{1}{3000} \int_0^{30} (30 + 29x - x^2) dx = \frac{1}{3000} \left[29 \frac{x^2}{2} + 30x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{30} = \\ &= \frac{1}{3000} \left[\left(29 \frac{30^2}{2} + 30 \cdot 30 - \frac{30^3}{3} \right) - \left(29 \frac{0^2}{2} + 30 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right] = \frac{1}{3000} [4950] = \frac{33}{20} = 1'65 \end{aligned}$$

Solución: *el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático B es $\frac{33}{20}$ u.a. $= 1'65$ u.a.*

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$$

Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (1 punto)

Solución:

Arreglamos la expresión de la función,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2x^2+4x+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2(x^2+2x+1)} = \frac{(x^2+2x+1)-(1+x^2)}{2(x^2+2x+1)} = \\ &= \frac{x^2+2x+1-1-x^2}{2(x^2+2x+1)} = \frac{2x}{2(x^2+2x+1)} = \frac{x}{x^2+2x+1} \end{aligned}$$

a) Dominio,

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{0}{0^2+2 \cdot 0+1} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

El único punto de corte es (0, 0).

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x}{x^2+2x+1}=0; \quad x=0 \rightarrow (0, 0)$$

Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{-1\}$ y el punto de corte con los ejes coordenados es: (0, 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

la asíntota horizontal es $y = 0$.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que la posible a.v. es $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{-1}{(-1)^2+2 \cdot (-1)+1} = \frac{-1}{0} = \infty \rightarrow x = -1 \text{ es a.v.}$$

La asíntota horizontal es $y = 0$ y la asíntota vertical $x = -1$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 2x + 1) - x \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 2x + 1)^2} =$$

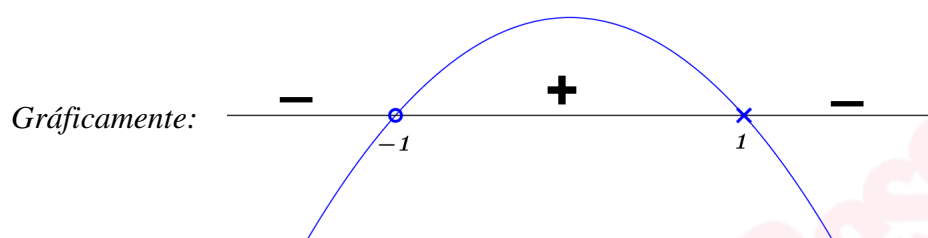
Obtenemos las raíces del numerador y denominador,

$$-x^2 + 1 = 0; \quad 1 = x^2; \quad x = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin \text{Dom } f(x) \end{cases}$$

$$(x^2 + 2x + 1)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = -1 \notin \text{Dom } f(x)$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo.

El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y con raíces -1 y 1 .



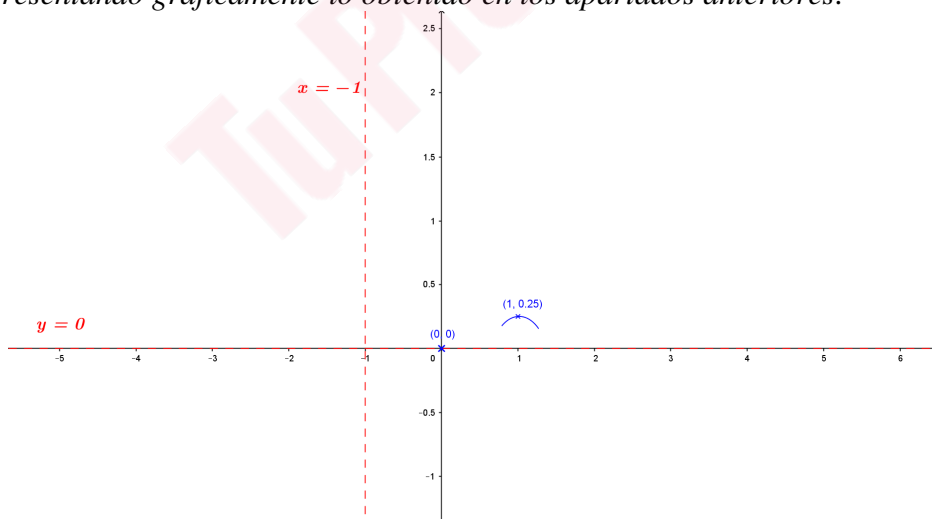
Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-1, 1)$.

Del estudio de la monotonía deducimos que sólo tiene un máximo local en $x = 1$ $\{x = -1 \notin \text{Dom } f(x)\}$

$$x = 1, \quad f(1) = \frac{1}{1^2 + 2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4}, \quad f(x) \text{ tiene un máximo local en } (1, 1/4).$$

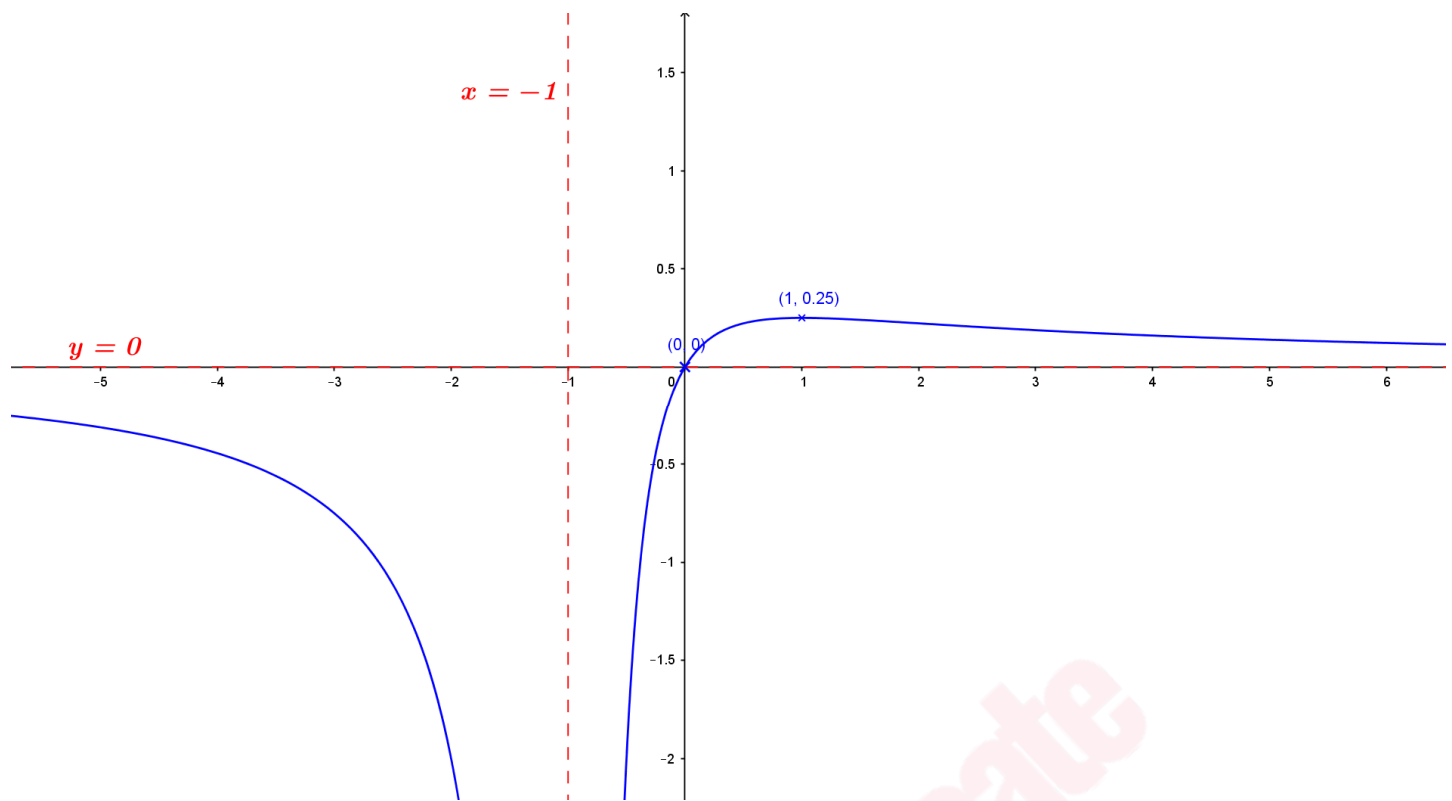
d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Representando gráficamente lo obtenido en los apartados anteriores:



También sabemos que la función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-1, 1)$.

La representación será:



Si con los datos obtenidos no viésemos la representación, podemos obtener otros puntos de la función.

$$f(-5) = \frac{-5}{(-5)^2 + 2 \cdot (-5) + 1} = -0'3125$$

$$f(-1'1) = \frac{-1'1}{(-1'1)^2 + 2 \cdot (-1'1) + 1} = -1'10$$

$$f(-0'9) = \frac{-0'9}{(-0'9)^2 + 2 \cdot (-0'9) + 1} = -90$$

$$f(5) = \frac{5}{5^2 + 2 \cdot 5 + 1} = 0'138$$