

CATALUÑA · PAU 2022 · ORDINARIA

Matemáticas CCSS

12 ejercicios

Instrucciones del examen

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué. Cada cuestión vale 2,5 puntos. Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información. Podéis utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, tenéis que indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Ejercicio 1

2,5 puntos

En el instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de Sant Jordi. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción de ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Sabemos que se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) 1,75 puntos

¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo?

b) 0,75 puntos

Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, el de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos?

Ejercicio 2

2,5 puntos

El valor de un producto electrónico, en función del número de meses que lleva a la venta, t , viene dado por la función $f(t) = -(t + 25)(t - 75)$.

a) 1,25 puntos

Encontrad los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$. ¿En qué momento el producto alcanzará el valor máximo? ¿Cuál es este valor máximo?

b) 1,25 puntos

Sabemos que el producto dejará de comercializarse cuando llegue a un valor de 475 €. ¿En qué momento dejará de comercializarse?

Ejercicio 3

2,5 puntos

Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un tipo de fruta determinado que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en centenares de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable a 1,2 euros por cada kilogramo.

a) 1,25 puntos

Determinad el intervalo de temperaturas entre las cuales hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calculad los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20 °C de temperatura.

b) 1,25 puntos

¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso?

Ejercicio 4

2,5 puntos

Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €. Sabemos que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €.

a) 1,25 puntos

¿Podemos saber el número de monedas que hay de cada tipo? En caso afirmativo, calculadlo. En caso negativo, dad la solución en función de un parámetro.

b) 1,25 puntos

Averiguad si se puede calcular el valor total, en euros, de las monedas de la caja. En caso afirmativo, calculadlo.

Ejercicio 5

2,5 puntos

Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para los trabajadores y las trabajadoras. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otra parte, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por tanto, de cava seguro que no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) 1,75 puntos

Determinad la función objetivo y las restricciones. Dibujad la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

b) 0,75 puntos

Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa se lo repiensa y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo se tendrán que hacer?

Ejercicio 6

2,5 puntos

Calculad la matriz X que verifica $A \cdot X \cdot B = C$, sabiendo que $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7

2,5 puntos

Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en centenares) viene dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2 + b}$, donde a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Sabemos que en el instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 centenares y que el valor máximo de población se ha alcanzado al cabo de 2 minutos de haber iniciado el estudio.

a) 1,25 puntos

Encontrad los valores de las constantes a y b .

b) 1,25 puntos

Calculad la población máxima de bacterias y estudiad su comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias.

Ejercicio 8

2,5 puntos

Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone y ofrece dos tarifas diferentes: la tarifa estándar (sin gastos de cancelación) es de 120 € por noche, y la tarifa reducida (que no admite cancelaciones) es de 90 € por noche. Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida y quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior al doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida.

a) 1,25 puntos

Determinad la función objetivo y las restricciones. Dibujad la región factible.

b) 1,25 puntos

Determinad cuántas habitaciones deben tener reservadas con cada tarifa para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

Ejercicio 9

2,5 puntos

Considerad las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) 1,5 puntos

Encontrad para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$.

b) 1 punto

Si $a = 2$, encontrad la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

Ejercicio 10

2,5 puntos

Una fábrica de vehículos produce coches de un modelo llamado Paradís y los vende a 58.000 €. Sabemos que los costes mensuales de producción vienen dados por la función $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704$ (en miles de euros), donde x denota el número de coches que se fabrican mensualmente.

a) 0,75 puntos

Suponiendo que se venden todos los coches que se fabrican, verificad que la función de beneficios es $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4.704$ (en miles de euros).

b) 1 punto

Determinad el número de coches que hay que fabricar mensualmente para no tener pérdidas. ¿Para qué número de unidades producidas se obtiene el beneficio máximo y cuál es este beneficio máximo?

c) 0,75 puntos

Se quiere aumentar el precio de venta por unidad, de manera que el beneficio máximo se obtenga con 130 unidades (la función que da el coste mensual en miles de euros no varía). ¿Cuál debe ser el nuevo precio de venta del coche?

Ejercicio 11

2,5 puntos

En los modelos matemáticos que se utilizan para describir la evolución de una enfermedad, se llama R_0 al número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando este número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, de media, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia. Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando solo a una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. En efecto, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva R_0 , que se llama efectiva y se denota con R_e , es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se consigue controlar la epidemia si la R_e es inferior a 1.

a) 0,75 puntos

En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si analizamos una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿hay riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población?

b) 0,75 puntos

En el caso concreto de la llamada gripe española de 1918, se estima que $R_0 = 4$. Calculad qué porcentaje de población habría sido necesario vacunar, como mínimo, para detener la epidemia de esta enfermedad.

c) 1 punto

Expresad, en general, el umbral de población mínima que hay que vacunar en función del valor R_0 de una enfermedad. Haced un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20.

Ejercicio 12

2,5 puntos

Considerad la función $f(x) = e^{3x}$.

a) 1,25 puntos

Calculad la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$.

b) 1,25 puntos

Obtened la ecuación de esta recta tangente.