

En la optimización se explicita la variable y la restricción; para los sistemas se comparan rangos.

### Opción A - Ejercicio 1

Sea  $x$  el lado paralelo a la carretera y  $y$  la profundidad. Se pagan 100 euros por metro en ese lado, y 10 euros por metro en cada uno de los otros tres lados:

$$100x + 10x + 20y = 3000 \implies y = 150 - \frac{11}{2}x.$$

El dominio físico es  $0 < x < 300/11$ . El área es

$$A(x) = xy = 150x - \frac{11}{2}x^2.$$

Como  $A'(x) = 150 - 11x$ , el punto crítico es  $x = 150/11$ ; además  $A''(x) = -11 < 0$ , por lo que es un máximo. Entonces  $y = 75$  y

$$x = \frac{150}{11} \text{ m}, \quad y = 75 \text{ m}, \quad A_{\max} = \frac{11250}{11} \text{ m}^2.$$

### Opción A - Ejercicio 2

A una altura  $y$  entre  $a$  y  $2$ , la parábola  $y = x^2/2$  tiene ramas  $x = \pm\sqrt{2y}$ . La anchura del recinto es por ello  $2\sqrt{2y}$ , y sumamos esas secciones horizontales:

$$\mathcal{A}(a) = \int_a^2 2\sqrt{2y} \, dy = \frac{4\sqrt{2}}{3} (2^{3/2} - a^{3/2}).$$

Imponemos el área dada:

$$\frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}a^{3/2} = \frac{14}{3} \implies a^{3/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 2^{-3/2}.$$

Como  $a > 0$ , resulta

$$a = \frac{1}{2}.$$

### Opción A - Ejercicio 3

---

Dividiendo la primera ecuación entre 2 y la tercera entre  $-3$  se obtiene

$$x - y + 2z = 2, \quad x + y - z = 1.$$

Al sumarlas resulta  $2x + z = 3$ . La segunda ecuación original exige  $2x + z = a$ . La matriz de coeficientes tiene rango 2, pues la segunda fila es combinación de la primera y la tercera; por tanto, el sistema será compatible solo si los términos independientes respetan esa misma relación, es decir, si  $a = 3$ . Para  $a = 3$ , ambos rangos valen  $2 < 3$ , luego es compatible indeterminado. Tomando  $z = t$ , las dos ecuaciones reducidas dan

$$(x, y, z) = \left( \frac{3-t}{2}, \frac{3t-1}{2}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para  $a \neq 3$ , los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

### Opción A - Ejercicio 4

---

La recta  $r$  pasa por  $P = (1, -1, 3)$  y tiene vector director  $(3, 2, -1)$ . El plano por el origen que contiene  $r$  tiene como normal el producto vectorial

$$(1, -1, 3) \times (3, 2, -1) = (-7, 10, 5),$$

por lo que su ecuación es

$$-7x + 10y + 5z = 0.$$

La recta  $s$  tiene punto  $(1, 0, 2)$  y vector director  $(0, 1, 2)$ . Un plano que contiene a  $s$  y es paralelo a  $r$  contiene ambos vectores directores; un normal es

$$(3, 2, -1) \times (0, 1, 2) = (5, -6, 3).$$

Usando el punto de  $s$ , el plano es

$$5x - 6y + 3z - 11 = 0.$$

### Opción B - Ejercicio 1

En el tramo  $18 \leq x \leq 50$ , los ingresos son  $I_1(x) = -x^2 + 70x$ , cuyo máximo está en el vértice de la parábola:

$$I_1'(x) = -2x + 70 = 0 \implies x = 35, \quad I_1(35) = 1225.$$

Para  $x \geq 50$ ,  $I_2(x) = 400x/(x - 30)$  y

$$I_2'(x) = \frac{-12000}{(x - 30)^2} < 0,$$

así que esos ingresos decrecen desde  $I_2(50) = 1000$ . En el punto de unión ambas expresiones valen 1000. Por tanto, el máximo global es

1225 euros, a los 35 años.

### Opción B - Ejercicio 2

La parábola es  $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ , con derivada  $f'(x) = -4x + 3$ . La recta de pendiente  $-1$  es tangente cuando  $f'(x) = -1$ , es decir, en  $x = 1$ , donde  $f(1) = 0$ . La recta de pendiente  $3$  es tangente cuando  $f'(x) = 3$ , en  $x = 0$ , donde  $f(0) = -1$ . Así se comprueban las dos tangencias. Las rectas se cortan en  $(1/2, 1/2)$ . En  $[0, 1/2]$ , la recta  $y = 3x - 1$  queda sobre la parábola, y en  $[1/2, 1]$  la recta  $y = -x + 1$  es la frontera superior. Restando la parábola en cada tramo:

$$\mathcal{A} = \int_0^{1/2} 2x^2 dx + \int_{1/2}^1 2(x - 1)^2 dx = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

### Opción B - Ejercicio 3

La igualdad dada implica

$$A(A + 2I) = A^2 + 2A = I,$$

por lo que  $A^{-1} = A + 2I$ . En la ecuación, sustituimos  $A^2 = I - 2A$ :

$$XA = 4I - A^2 - 5A = 3I - 3A.$$

Multiplicamos a la derecha por  $A^{-1}$ :

$$X = 3(I - A)A^{-1} = 3(A^{-1} - I) = 3(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Opción B - Ejercicio 4

Los vectores directores de las rectas son  $\vec{d}_r = (2, -1, 1)$  y  $\vec{d}_s = (0, 0, 1)$ . Sean

$$R = (-7 + 2t, 7 - t, t) \in r, \quad S = (2, -5, u) \in s.$$

Para que la recta  $RS$  corte perpendicularmente a ambas, su vector  $S - R$  debe ser perpendicular a los dos directores:

$$(S - R) \cdot \vec{d}_s = 0 \implies u = t, \quad (S - R) \cdot \vec{d}_r = 0 \implies 30 - 6t + u = 0.$$

De aquí  $t = u = 6$ ,  $R = (5, 1, 6)$  y  $S = (2, -5, 6)$ . La recta buscada pasa por  $R$  y tiene la dirección de  $S - R$ , que puede tomarse como  $(1, 2, 0)$ :

$$x = 5 + \tau, \quad y = 1 + 2\tau, \quad z = 6, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

La distancia entre las rectas es la longitud del segmento perpendicular común:

$$d(r, s) = |RS| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}.$$