

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Operaciones y ecuación matricial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos cada potencia antes de sumarlas:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^2 + B^3 = \begin{pmatrix} -19 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) En $(A + B)X = A - B$, el determinante de la matriz que multiplica a X es

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A + B) = -4 \neq 0.$$

Así, existe la inversa y despejamos multiplicando por ella a la izquierda:

$$X = (A + B)^{-1}(A - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + B^3 = \begin{pmatrix} -19 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Beneficio, máximo y representación gráfica

La empresa vende entre 50 y 350 unidades, así que estudiamos

$$B(x) = -x^2 + 360x - 18000, \quad 50 \leq x \leq 350.$$

a) Sustituyendo $x = 100$,

$$B(100) = -100^2 + 360 \cdot 100 - 18000 = 8000 \text{ €}.$$

Para obtener 13 500 €, igualamos la función a esa cantidad:

$$-x^2 + 360x - 18000 = 13500 \iff x^2 - 360x + 31500 = 0.$$

Factorizamos usando sus raíces:

$$x = \frac{360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \cdot 31500}}{2} = \frac{360 \pm 60}{2} \implies x = 150 \text{ o } 210.$$

Ambos valores pertenecen al dominio.

b) La parábola abre hacia abajo, de modo que su vértice es el máximo. También podemos localizarlo anulando la derivada:

$$B'(x) = -2x + 360 = 0 \implies x = 180.$$

La derivada es positiva antes de 180 y negativa después; el beneficio crece hasta ese punto y decrece a continuación. Su valor máximo es

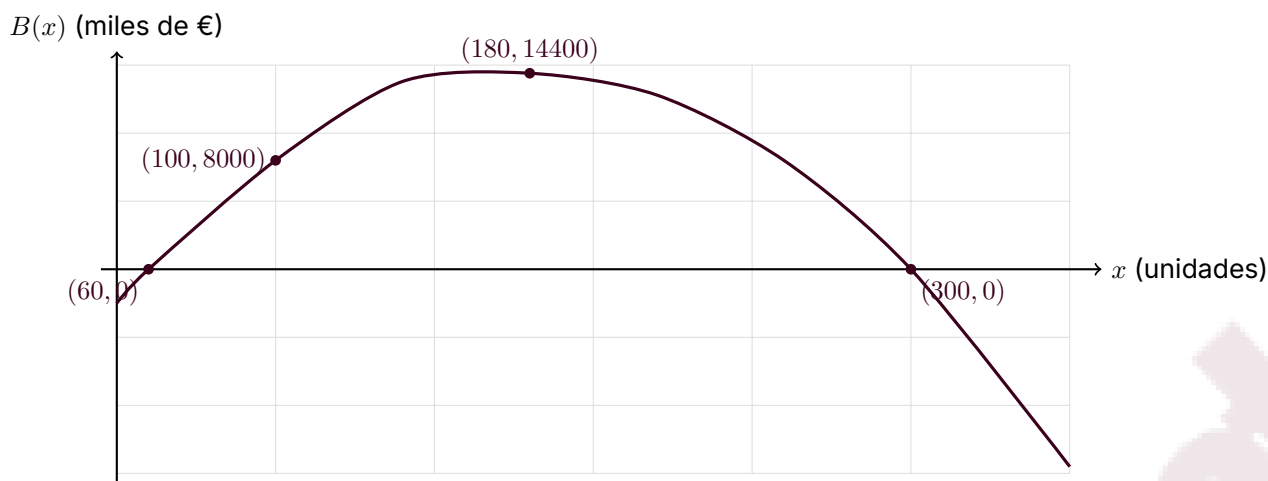
$$B(180) = -180^2 + 360 \cdot 180 - 18000 = 14400 \text{ €}.$$

c) Para no tener pérdidas necesitamos $B(x) \geq 0$. Primero hallamos los cortes con el eje horizontal:

$$-x^2 + 360x - 18000 = 0 \iff x^2 - 360x + 18000 = 0,$$

$$x = \frac{360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \cdot 18000}}{2} = \frac{360 \pm 240}{2} \implies x = 60, 300.$$

Como la parábola es cóncava hacia abajo, el beneficio es no negativo entre las raíces. En el dominio de producción esto corresponde a $60 \leq x \leq 300$.



$$B(100) = 8000 \text{ €}; \quad B(x) = 13500 \text{ € si } x = 150 \text{ o } 210; \\ B_{\max} = 14400 \text{ € en } x = 180; \quad B(x) \geq 0 \text{ para } 60 \leq x \leq 300.$$

Ejercicio 3 · Independencia, incompatibilidad y condicionada

Se sabe que A y B son independientes y que $P(A) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,1$. La independencia permite obtener $P(B)$:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \implies P(B) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25.$$

Además, A y C son incompatibles y $P(C) = 0,2$.

a) La probabilidad condicionada de A si no sucede B es

$$P(A | B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,1}{1 - 0,25} = 0,4.$$

b) Al ser A y C incompatibles, $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0,6$. Por tanto,

$$P(A^c \cap C^c) = 1 - P(A \cup C) = 0,4.$$

c) La independencia de A y B implica también la independencia de sus complementarios; así,

$$P(A^c | B^c) = P(A^c) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

La respuesta también se obtiene como $1 - P(A | B^c)$.

$$P(A | B^c) = 0,4; \quad P(A^c \cap C^c) = 0,4; \quad P(A^c | B^c) = 0,6.$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral de alumnos que llevan gafas es

$$\hat{p} = \frac{210}{300} = 0,70, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,30.$$

Para un intervalo bilateral de confianza para la proporción poblacional usamos

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

a) Con confianza del 97%, $\alpha = 0,03$ y $z_{0,985} \approx 2,170$. El error máximo es

$$E = 2,170 \sqrt{\frac{0,70 \cdot 0,30}{300}} \approx 0,0574.$$

Por tanto,

$$IC_{97\%}(p) = 0,70 \pm 0,0574 \approx [0,6426, 0,7574].$$

b) Para planificar la muestra usamos la proporción previa $p = 0,70$ y $q = 0,30$. La condición de error estrictamente inferior a 0,06 es

$$2,170 \sqrt{\frac{0,70 \cdot 0,30}{n}} < 0,06 \implies n > \frac{2,170^2 \cdot 0,70 \cdot 0,30}{0,06^2} \approx 274,71.$$

El menor tamaño entero que cumple esta desigualdad es 275.

$$IC_{97\%}(p) \approx [0,6426, 0,7574]; \quad n_{\min} = 275.$$

Opción B

Ejercicio 1 · Región factible y programación lineal

El recinto está definido por

$$y \leq x + 3, \quad x + 5y \geq 3, \quad 2x + 7y \leq 30, \quad y \geq 0.$$

Para representarlo y localizar sus vértices, hallamos las intersecciones de las rectas frontera que satisfacen todas las desigualdades:

$$y = x + 3, \quad x + 5y = 3 \implies (-2, 1); \quad y = x + 3, \quad 2x + 7y = 30 \implies (1, 4).$$

Con el eje x ($y = 0$), las restricciones $x + 5y \geq 3$ y $2x + 7y \leq 30$ dan los puntos $(3, 0)$ y $(15, 0)$. Por tanto, los vértices del recinto son $(-2, 1)$, $(1, 4)$, $(15, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Sustituimos $(5, 3)$ en cada restricción:

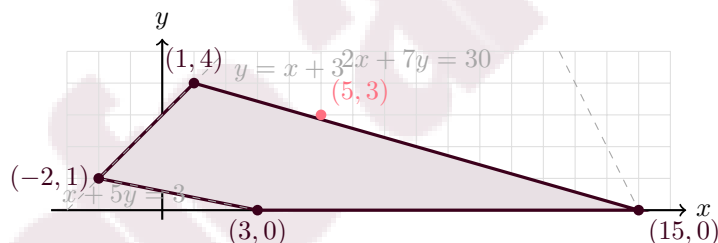
$$3 \leq 5 + 3, \quad 5 + 5 \cdot 3 = 20 \geq 3, \quad 2 \cdot 5 + 7 \cdot 3 = 31 \not\leq 30, \quad 3 \geq 0.$$

No se cumplen todas, así que $(5, 3)$ no pertenece al recinto.

c) Una función lineal alcanza sus extremos en vértices del recinto, aunque puede tomar el mismo valor en todo un lado. Evaluamos $F(x, y) = x - y$:

(x, y)	$(-2, 1)$	$(1, 4)$	$(15, 0)$	$(3, 0)$
$F(x, y)$	-3	-3	15	3

En el lado entre $(-2, 1)$ y $(1, 4)$ se cumple $y = x + 3$, así que $F = -3$ en todo ese lado; es el mínimo. El máximo 15 se alcanza en $(15, 0)$.



$$F_{\min} = -3 \text{ en todo el lado entre } (-2, 1) \text{ y } (1, 4); \quad F_{\max} = 15 \text{ en } (15, 0).$$

Ejercicio 2 · Derivabilidad y recta tangente

La función del enunciado es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1}, & x < 0, \\ x^2 - bx - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

El dominio es todo $\mathbb{R}$: el denominador de la primera rama no se anula para $x < 0$ y la segunda rama es polinómica. Para que sea derivable en $x = 0$, primero igualamos el límite por la izquierda con el valor de la rama derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x-1} = -a, \quad f(0) = -1, \quad -a = -1 \implies a = 1.$$

Las derivadas laterales también deben coincidir:

$$\left(\frac{a}{x-1} \right)' = -\frac{a}{(x-1)^2}, \quad (x^2 - bx - 1)' = 2x - b,$$

$$f'_-(0) = -a, \quad f'_+(0) = -b.$$

Con $a = 1$, la igualdad exige $b = 1$.

b) Para $a = 1$ y $b = 2$, el punto de abscisa 2 pertenece a la segunda rama. Su valor y la pendiente de la tangente son

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -1, \quad f'(x) = 2x - 2, \quad f'(2) = 2.$$

La recta tangente que pasa por $(2, -1)$ con pendiente 2 es

$$y + 1 = 2(x - 2) \implies y = 2x - 5.$$

$$a = 1, \quad b = 1; \quad y_{\text{tangente}} = 2x - 5.$$

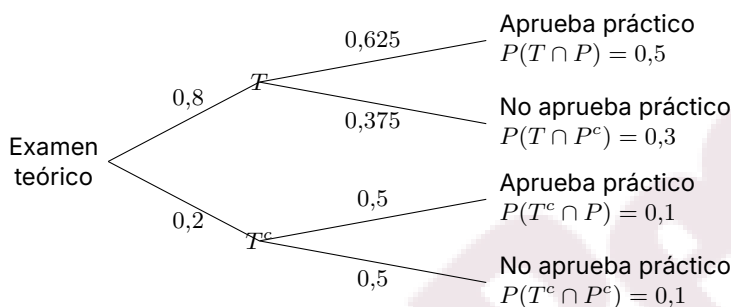
Ejercicio 3 · Probabilidad total y probabilidad condicionada

Sean T el suceso «aprobar el examen teórico» y P el suceso «aprobar el práctico». Se conocen

$$P(T) = 0,8, \quad P(P) = 0,6, \quad P(T \cap P) = 0,5.$$

En un árbol, las probabilidades de un camino se multiplican, y las hojas incompatibles que conducen al mismo suceso se suman. Las probabilidades condicionadas del práctico son

$$P(P | T) = \frac{0,5}{0,8} = 0,625, \quad P(P | T^c) = \frac{P(P) - P(T \cap P)}{P(T^c)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$



a) Sumamos las hojas en las que aprueba al menos uno:

$$P(T \cup P) = P(T) + P(P) - P(T \cap P) = 0,8 + 0,6 - 0,5 = 0,9.$$

b) Si no aprobó el teórico, la probabilidad de aprobar el práctico es

$$P(P | T^c) = \frac{P(T^c \cap P)}{P(T^c)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

c) Para la independencia debería cumplirse $P(T \cap P) = P(T)P(P)$. Sin embargo,

$$0,5 \neq 0,8 \cdot 0,6 = 0,48,$$

por lo que los sucesos no son independientes.

$$P(T \cup P) = 0,9; \quad P(P | T^c) = 0,5; \quad T, P \text{ no son independientes.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

La variable peso sigue una distribución normal y se conoce su desviación típica poblacional, $\sigma = 25$ g. Para un intervalo bilateral de confianza usamos

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

a) Con $\bar{x} = 230$ g, $n = 100$ y confianza del 96%, tenemos $\alpha = 0,04$ y $z_{0,98} \approx 2,054$. El error máximo es

$$E = 2,054 \frac{25}{\sqrt{100}} = 5,135 \text{ g.}$$

Por tanto,

$$IC_{96\%}(\mu) = 230 \pm 5,135 \approx [224,865, 235,135] \text{ g.}$$

b) El error máximo del intervalo anterior es su semiapertura: 5,135 g.

c) Para que el error máximo sea 2 g, el tamaño muestral debe cumplir

$$2,054 \frac{25}{\sqrt{n}} \leq 2 \implies n \geq \left(\frac{2,054 \cdot 25}{2} \right)^2 \approx 659,2.$$

Redondeamos hacia arriba para garantizar el error pedido: hacen falta al menos 660 tarros.

$$IC_{96\%}(\mu) \approx [224,865, 235,135] \text{ g}; \quad E = 5,135 \text{ g}; \quad n_{\min} = 660.$$