

Julio de 2020 · Convocatoria extraordinaria · Versión 1

El examen propone seis problemas y pide elegir tres. Para que puedas practicar cualquiera de ellos, resolvemos aquí los seis, explicando qué hacemos y por qué.

Problema 1 · Sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} x + y + az = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ ax + y + z = -2. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

Para clasificar el sistema con Rouché–Frobenius, comparamos $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$. Primero calculamos el determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= 1(a-1) - 1(1-a) + a(1-a^2) \\ &= 3a - 2 - a^3 \\ &= -(a-1)^2(a+2). \end{aligned}$$

Si $a \neq 1, -2$, el determinante no es cero; por tanto $\text{rg}(A) = 3$. La ampliada tiene también rango 3, así que

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas},$$

y el sistema es compatible determinado (SCD).

Quedan los valores que anulan el determinante:

- **Caso $a = 1$.** Las tres filas de A son $(1, 1, 1)$, luego $\text{rg}(A) = 1$. En la ampliada aparecen, entre otras, las filas $(1, 1, 1 | 1)$ y $(1, 1, 1 | -2)$. El menor formado por la primera columna y la ampliada vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A^*) \geq 2$. Las filas 1 y 2 de A^* son iguales y la tercera es independiente, por lo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Los rangos son distintos, así que el sistema es incompatible (SI).

- **Caso $a = -2$.** Las filas de A cumplen $F_1 + F_2 + F_3 = 0$, y las dos primeras son independientes porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$. En la ampliada también se cumple $F_1 + F_2 + F_3 = 0$, incluido el término independiente $1 + 1 - 2 = 0$. El mismo menor no nulo garantiza $\text{rg}(A^*) = 2$. Como $2 = 2 < 3$, el sistema es compatible indeterminado (SCI), con infinitas soluciones.

Soluciones para $a = -2$. Las dos ecuaciones independientes son

$$x + y - 2z = 1, \quad x - 2y + z = 1.$$

Restamos la segunda de la primera: $3y - 3z = 0$, es decir, $y = z$. Al sustituirlo en la primera, $x - y = 1$. Tomando $y = z = t$,

$$(x, y, z) = (1 + t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solución para $a = 0$. El sistema queda

$$x + y = 1, \quad x + z = 1, \quad y + z = -2.$$

De las dos primeras ecuaciones, $y = z$. Entonces $y + z = -2$ da $y = z = -1$, y $x + y = 1$ da $x = 2$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (2, -1, -1).$$

Problema 2 · Recta, plano y distancia

La recta está dada en forma continua. La pasamos a forma paramétrica usando un parámetro t :

$$r: x = 1 + t, y = -1 + t, z = -t.$$

Su vector director es $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Además,

$$P = (1, 0, 0), Q = (2, 1, a), \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 1, a).$$

a) Valor de a para que la recta PQ sea paralela a r . Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son proporcionales. Aquí

$$(1, 1, a) = \lambda(1, 1, -1).$$

Las dos primeras coordenadas obligan a $\lambda = 1$; la tercera da $a = -1$. Luego

$$\boxed{a = -1}.$$

b) Plano que contiene a P, Q y es paralelo a r , cuando $a = 1$. En este caso $Q = (2, 1, 1)$ y $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1)$. El plano contiene los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, -1)$. Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$(1, 1, 1) \times (1, 1, -1) = (-2, 2, 0).$$

Podemos usar el normal equivalente $(1, -1, 0)$. La ecuación de un plano con normal $(1, -1, 0)$ que pasa por $P = (1, 0, 0)$ es

$$1(x - 1) - 1(y - 0) + 0(z - 0) = 0.$$

Por tanto, en forma general,

$$\boxed{\pi: x - y - 1 = 0}.$$

c) Distancia de Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $a = 1$. Un plano perpendicular a r tiene como vector normal el director de la recta, $(1, 1, -1)$. Al pasar por $P = (1, 0, 0)$, su ecuación general es

$$\sigma: (x - 1) + y - z = 0 \iff x + y - z - 1 = 0.$$

La distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos $Q = (2, 1, 1)$ y los coeficientes de σ :

$$d(Q, \sigma) = \frac{|2 + 1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Problema 3 · Función racional, asíntotas e integral

La función es

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)}.$$

a) Dominio y asíntotas. El denominador se anula cuando $x^2 = 0$ o $x - 1 = 0$, es decir, en $x = 0$ y $x = 1$. Esos dos valores se excluyen del dominio:

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}}.$$

Comprobamos las asíntotas verticales con los límites laterales. Cerca de 0 , el numerador tiende a 1 y el denominador es negativo a ambos lados, porque $x^2 > 0$ y $x - 1 < 0$; así,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Cerca de 1 , el numerador tiende a 2 y $x^2 > 0$, mientras que $x - 1$ cambia de signo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, hay asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

Para $x \rightarrow \pm\infty$, el grado del numerador (2) es menor que el del denominador (3), por lo que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

La asíntota horizontal es $y = 0$. No hay asíntota oblicua porque ya existe una horizontal en ambos extremos.

b) Primitiva y la que pasa por (2, 0). Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1}.$$

Al multiplicar por $x^2(x - 1)$ e igualar coeficientes,

$$x^2 + 1 = Ax(x - 1) + B(x - 1) + Cx^2,$$

de donde $-B = 1$, $-A + B = 0$ y $A + C = 1$. Así, $B = -1$, $A = -1$ y $C = 2$. Integramos término a término:

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \left(\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= 2 \ln |x - 1| - \ln |x| + \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

Para que la gráfica pase por (2, 0), imponemos $F(2) = 0$:

$$2 \ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} + C = 0 \implies C = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

La primitiva pedida es

$$F(x) = 2 \ln |x - 1| - \ln |x| + \frac{1}{x} + \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

c) Área entre la curva y el eje x , desde $x = 2$ hasta $x = 4$. En $[2, 4]$, el numerador es positivo y el denominador también, pues $x^2 > 0$ y $x - 1 > 0$. Por tanto $f(x) > 0$ y el área coincide con la integral. Usamos la primitiva sin constante:

$$\begin{aligned}S &= \int_2^4 f(x) dx \\ &= \left[2 \ln |x - 1| - \ln |x| + \frac{1}{x} \right]_2^4 \\ &= \left(2 \ln 3 - \ln 4 + \frac{1}{4} \right) - \left(0 - \ln 2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{9}{2} \right) - \frac{1}{4} \text{ unidades cuadradas}.\end{aligned}$$

Problema 4 · Productos e inversa de matrices

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Valores de b para que AB y BA sean invertibles. Calculamos los dos productos por separado. Para AB (matriz 3×3), cada entrada es el producto escalar de una fila de A con una columna de B :

$$AB = \begin{pmatrix} 1(-1) + 2(-1) & 1(0) + 2b & 1(2) + 2(-1) \\ b(-1) + 0(-1) & b(0) + 0b & b(2) + 0(-1) \\ (-1)(-1) + 2(-1) & (-1)(0) + 2b & (-1)(2) + 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (-3)(-4b^2) - (2b)(4b + 2b) \\ &= 12b^2 - 12b^2 = 0. \end{aligned}$$

Así que AB no tiene inversa para ningún valor de b .

Calculamos ahora BA , de tamaño 2×2 :

$$BA = \begin{pmatrix} (-1)(1) + 0b + 2(-1) & (-1)(2) + 0(0) + 2(2) \\ (-1)(1) + b^2 + (-1)(-1) & (-1)(2) + b(0) + (-1)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante no es cero:

$$\det(BA) = (-3)(-4) - 2b^2 = 12 - 2b^2 = 2(6 - b^2).$$

Por tanto, BA es invertible cuando $b \neq \pm\sqrt{6}$. En consecuencia, **no existe ningún b para el que ambas matrices sean invertibles simultáneamente**; individualmente, AB nunca lo es y BA sí lo es si $b \neq \pm\sqrt{6}$.

b) Valores de b para que $A^T A$ tenga inversa. Primero trasponemos A y multiplicamos:

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ A^T A &= \begin{pmatrix} 1^2 + b^2 + (-1)^2 & 1 \cdot 2 + b \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot b + 2(-1) & 2^2 + 0^2 + 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Su determinante es

$$\det(A^T A) = 8(b^2 + 2) > 0 \text{ para todo } b \in \mathbb{R},$$

porque $b^2 \geq 0$. Luego $A^T A$ tiene inversa para todo b real.

c) Inversa de $A^T A$. La inversa de una matriz diagonal se obtiene tomando los recíprocos de sus elementos diagonales. Aplicándolo aquí:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2 + 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Problema 5 · Planos y recta perpendicular

El plano dado en forma general es $\pi : 2x + y - z - 5 = 0$, con vector normal $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$. Los puntos son $A = (1, 2, -1)$ y $B = (2, 1, 0)$, de modo que

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 1).$$

a) Plano por A, B y perpendicular a π . El plano buscado contiene la dirección $\overrightarrow{AB}$. Además, al ser perpendicular a π , su normal debe ser perpendicular a $\mathbf{n}$. Un vector que cumple ambas condiciones es el producto vectorial

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n} = (1, -1, 1) \times (2, 1, -1) = (0, 3, 3),$$

que podemos simplificar a $\mathbf{n}' = (0, 1, 1)$. La ecuación del plano con este normal y que pasa por A es

$$0(x - 1) + (y - 2) + (z + 1) = 0.$$

Por tanto, en forma general,

$$\boxed{\rho : y + z - 1 = 0}.$$

b) Recta por A perpendicular a π , y dos planos que la determinan. La dirección de una recta perpendicular a un plano es el vector normal del plano. Usamos $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$ como director y escribimos la recta en forma paramétrica:

$$\boxed{r : x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = -1 - t, t \in \mathbb{R}}.$$

Para hallar dos planos que se corten exactamente en esa recta, buscamos dos normales independientes perpendiculares a $(2, 1, -1)$. Podemos usar $(0, 1, 1)$ y $(1, -2, 0)$, pues sus productos escalares con el director son $1 - 1 = 0$ y $2 - 2 = 0$. Al hacer pasar los planos por A , obtenemos

$$\boxed{y + z - 1 = 0}, \quad \boxed{x - 2y + 3 = 0}.$$

Sus normales no son proporcionales, así que su intersección es una recta; como ambos contienen a A y tienen dirección común $(2, 1, -1)$, esa intersección es r .

c) Distancia de B a r . La distancia de un punto B a una recta que pasa por A y tiene director $\mathbf{n}$ es

$$d(B, r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Sustituimos los vectores calculados:

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n} = (0, 3, 3), \quad |\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}| = 3\sqrt{2}, \quad |\mathbf{n}| = \sqrt{6}.$$

Así,

$$d(B, r) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \boxed{\sqrt{3} \text{ unidades}}.$$

Problema 6 · Área de un triángulo isósceles

Los lados iguales miden 10 cm y el tercer lado mide x cm. Por la desigualdad triangular, para que el triángulo no sea degenerado debe cumplirse $0 < x < 20$; el enunciado permite estudiar la función en el intervalo cerrado $[0, 20]$, donde los extremos representan triángulos degenerados de área cero.

a) Expresión del área. La altura desde el vértice opuesto a la base divide la base en dos trozos de longitud $x/2$. Por Pitágoras,

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}.$$

El área es base por altura dividido entre dos:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} x h \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} \\ &= \left[\frac{x}{4} \sqrt{400 - x^2} \right], \quad 0 \leq x \leq 20. \end{aligned}$$

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. En el interior del dominio derivamos usando la regla del producto:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{4} \sqrt{400 - x^2} + \frac{x}{4} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}} \\ &= \frac{400 - 2x^2}{4\sqrt{400 - x^2}} = \frac{200 - x^2}{2\sqrt{400 - x^2}}. \end{aligned}$$

Para $0 < x < 20$, el denominador es positivo. Igualamos a cero el numerador:

$$200 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Comprobamos el signo de la derivada con un valor de prueba en cada intervalo:

Intervalo	Valor de prueba	Sustitución en $A'(x)$	Signo	Comportamiento
$(0, 10\sqrt{2})$	10	$A'(10) = \frac{100}{2\sqrt{300}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$	+	Crece
$x = 10\sqrt{2}$	—	$A'(10\sqrt{2}) = 0$	0	Punto crítico
$(10\sqrt{2}, 20)$	15	$A'(15) = \frac{-25}{2\sqrt{175}} = -\frac{5}{2\sqrt{7}}$	-	Decrece

Por tanto, $A(x)$ crece en $[0, 10\sqrt{2}]$ y decrece en $[10\sqrt{2}, 20]$.

c) Base que produce el área máxima. Como la función crece antes de $10\sqrt{2}$ y decrece después, alcanza su máximo en ese punto. Sustituimos en la fórmula del área:

$$A(10\sqrt{2}) = \frac{10\sqrt{2}}{4} \sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = \frac{10\sqrt{2}}{4} \sqrt{200} = \boxed{50 \text{ cm}^2}.$$

La longitud del tercer lado que da el área máxima es

$$\boxed{x = 10\sqrt{2} \text{ cm}}.$$