

Modelo 5 de 2004

Funciones, límites, áreas, sistemas homogéneos y geometría.

Opción A - Ejercicio 1

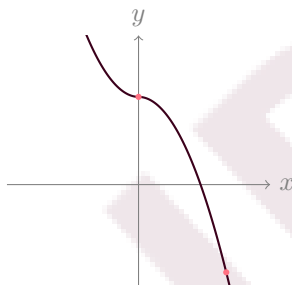
Escribimos f por tramos para eliminar el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2, & x < 0, \\ 2 - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ambas expresiones valen 2 en $x = 0$, y sus derivadas laterales también coinciden: $2x \rightarrow 0$ y $-2x \rightarrow 0$. Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$. La gráfica pasa por $(0, 2)$ con tangente horizontal. En $x = 2$, $f(2) = -2$ y $f'(2) = -4$, luego

$$y + 2 = -4(x - 2) \implies \boxed{y = -4x + 6}.$$

La gráfica consta de $y = 2 + x^2$ si $x < 0$ y $y = 2 - x^2$ si $x \geq 0$; ambas ramas se unen suavemente en $(0, 2)$.



Opción A - Ejercicio 2

En $[1, 2]$, $\ln x$ está por encima de $1 - 2x$, pues su valor es no negativo mientras que $1 - 2x < 0$. El área es

$$S = \int_1^2 (\ln x - (1 - 2x)) dx = [x \ln x - 2x + x^2]_1^2 = \boxed{1 + 2 \ln 2}.$$

Opción A - Ejercicio 3

El sistema es homogéneo y tiene soluciones no triviales precisamente cuando el determinante de su matriz de coeficientes es cero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{pmatrix} = 19(a - 10).$$

Así, $a = 10$. Con este valor, la tercera fila es combinación de las dos primeras y la primera ecuación da $x + 3y + z = 0$. La segunda, $2x - 13y + 2z = 0$, junto con la primera implica $y = 0$ y $z = -x$. Por tanto,

$$\boxed{(x, y, z) = t(-1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Para $t \neq 0$ se obtienen las soluciones distintas de la trivial.

Opción A - Ejercicio 4

La recta r tiene punto $P = (1, 1, 1)$ y dirección $d = (1, 1, 3)$. El vector normal del plano dado es $n = (2, 1, -1)$. Un plano perpendicular a este debe tener un normal perpendicular a n ; además, para contener a r , su normal debe ser perpendicular a d . El producto vectorial $n \times d = (4, -7, 1)$ cumple ambas condiciones. Usándolo como normal y pasando por P :

$$4(x-1) - 7(y-1) + (z-1) = 0 \implies \boxed{4x - 7y + z + 2 = 0}.$$

Un plano paralelo a π tiene normal $(2, 1, -1)$. Como $n \cdot d = 2 + 1 - 3 = 0$, la dirección de r es paralela a tales planos. El plano de esa familia que contiene P es

$$\boxed{2x + y - z - 2 = 0}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para que el límite sea finito, deben cancelarse los términos que divergen como $1/x$. Usamos el desarrollo $e^x - 1 = x + x^2/2 + o(x^2)$, de donde

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1).$$

Así, el coeficiente de $1/x$ desaparece si $1 - a/2 = 0$, luego $a = 2$. El límite que queda es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 2

La curva corta al eje x cuando $x/3 - b = 0$, es decir, en $x = 3b$. Como $b > 0$, el recinto con los ejes está entre $x = 0$ y $x = 3b$, bajo la parábola:

$$8 = S = \int_0^{3b} \left(\frac{x}{3} - b \right)^2 dx = 3 \int_{-b}^0 u^2 du = b^3,$$

donde usamos $u = x/3 - b$. Por tanto, $\boxed{b = 2}$. **Opción B - Ejercicio 3**

Sea $D = -2$ el determinante dado.

- En (a), se multiplica la primera fila por 3 y la tercera columna por 5. El factor es 15, de modo que el nuevo determinante es $15D = \boxed{-30}$.
- En (b), se intercambian las dos primeras filas y se multiplica una de ellas por 3. El factor es -3 , así que el resultado es $-3D = \boxed{6}$.
- En (c), la segunda fila se sustituye por $R_2 - R_3$. Por linealidad, el determinante no cambia, pues el término con dos filas iguales es cero. El valor es $\boxed{-2}$.

Opción B - Ejercicio 4

Las rectas contienen lados opuestos del cuadrado. De $x + y = 2$ y $x + y = 6$ se obtienen dos planos paralelos, ambos con normal $(1, 1, 0)$. La distancia entre ellos es

$$d = \frac{|6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2},$$

que es la longitud del lado del cuadrado. Por tanto, su área es $\boxed{8}$. Ambas rectas cumplen $z = 0$, así que el plano que contiene al cuadrado es

$$\boxed{z = 0}.$$