



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN MATEMÁTICAS II**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
 - c) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
 - d) **Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.**
 - f) **Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - g) **En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos de área 25 cm^2 , determina las dimensiones de aquel en el que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3}$, para $x^2 + bx - 3 \neq 0$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula a y b para que $y = x - 2$ sea una asíntota oblicua de la gráfica de f .
- b) **[1 punto]** Estudia y halla las asíntotas verticales de la gráfica de f cuando $a = 0$ y $b = 2$.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2}$

cuya gráfica pase por el punto $(5, -7/2)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x-1 = t^2$).



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & y & z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) **[1 punto]** Sabiendo que el determinante de A es 5, calcula $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, indicando las propiedades que utilizas.
- b) **[1,5 puntos]** Calcula los valores $(x \ y \ z)$ tales que $B \cdot A = C$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a) **[1,75 puntos]** Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.
- b) **[0,75 puntos]** Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = y + a = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y=3a \\ x+z=2 \end{cases}$.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula a para que las rectas se corten.
- b) **[1,25 puntos]** Para $a = -1$, halla la recta que corta perpendicularmente a r y s .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

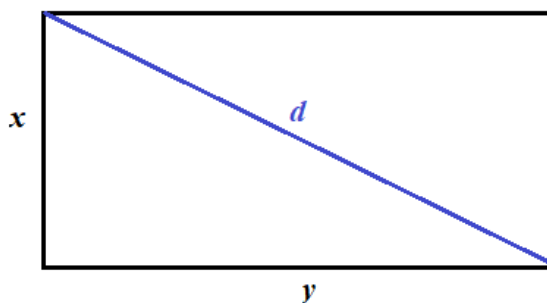
Considera los vectores $\vec{u} = (1, a, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1, a)$.

- a) **[1 punto]** Calcula a para que ambos vectores formen un ángulo de $\pi/3$ radianes.
- b) **[1,5 puntos]** Calcula a para que el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos de área 25 cm^2 , determina las dimensiones de aquel en el que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible.



El área del rectángulo es el producto de la longitud de la base por la altura y sabemos que debe valer 25 cm^2 .

$$\text{Área} = xy = 25 \Rightarrow y = \frac{25}{x}$$

Las dos diagonales del rectángulo miden lo mismo, por lo que el producto de las mismas vale d^2 .

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos x e y del dibujo.

$$x^2 + y^2 = d^2$$

Sustituimos y por $\frac{25}{x}$.

$$d^2 = x^2 + \left(\frac{25}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{625}{x^2}$$

Debemos minimizar la función $f(x) = x^2 + \frac{625}{x^2}$.

Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = x^2 + \frac{625}{x^2} = x^2 + 625x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2x + 625x^{-3}(-2) = 2x - \frac{1250}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1250}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1250}{x^3} \Rightarrow 2x^4 = 1250 \Rightarrow x^4 = 625 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[4]{625} = 5}$$

Solo nos interesa el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la segunda derivada para $x = 5$.

$$f'(x) = 2x - 1250x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 2 - 1250(-3)x^{-4} = 2 + \frac{3750}{x^4} \Rightarrow f''(5) = 2 + \frac{3750}{5^4} = 8 > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la función tiene un mínimo para $x = 5$. Para este valor tenemos que $y = \frac{25}{5} = 5$.

Para que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible debe ser un cuadrado de lado 5 cm.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3}$, para $x^2 + bx - 3 \neq 0$.

a) [1,5 puntos] Calcula a y b para que $y = x - 2$ sea una asíntota oblicua de la gráfica de f .

b) [1 punto] Estudia y halla las asíntotas verticales de la gráfica de f cuando $a = 0$ y $b = 2$.

a) Si $y = x - 2$ es una asíntota oblicua de la función se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + x - 1}{x^3 + bx^2 - 3x} = a \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{a=1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x - 1 - x^3 - bx^2 + 3x}{x^2 + bx - 3} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-bx^2 + 4x - 1}{x^2 + bx - 3} \right) = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = -b \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow \boxed{b=2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = -2 \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 2$.

b) Cuando $a = 0$ y $b = 2$ la función queda $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3}$. Esta función es racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{-2-4}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-3-1}{(-3)^2 + 2(-3) - 3} = \frac{-4}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1-1}{1^2+2(1)-3} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$x=1$ **no** es asíntota vertical.

La función tiene una asíntota vertical: $x = -3$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función cambia de definición por lo que la integral definida pedida la expresamos como la integral definida entre $-\pi$ y 0 más la integral definida entre 0 y π .

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 1 - e^x dx + \int_0^{\pi} x \cos(x) dx = \left[x - e^x \right]_{-\pi}^0 + \dots$$

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(x) dx \rightarrow v = \int \cos(x) dx = \sin(x) \end{array} \right\} = x \sin(x) - \int \sin(x) dx =$$

$$= x \sin(x) - (-\cos(x)) = x \sin(x) + \cos(x) + K$$

$$\dots = \left[x - e^x \right]_{-\pi}^0 + \left[x \sin(x) + \cos(x) \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[0 - e^0 \right] - \left[-\pi - e^{-\pi} \right] + \left[\pi \sin(\pi) + \cos(\pi) \right] - \left[0 \cdot \sin(0) + \cos(0) \right] =$$

$$= -1 + \pi + \frac{1}{e^{\pi}} - 1 - 1 = \boxed{\pi + \frac{1}{e^{\pi}} - 3}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2}$ cuya gráfica pase por el punto $(5, -7/2)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x-1 = t^2$).

Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x-1 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int (t^2)^2 \ln \frac{\sqrt{t^2}}{2} 2t dt = \int t^4 \ln \frac{t}{2} 2t dt = 2 \int t^5 \ln \frac{t}{2} dt = \dots$$

$$\int t^5 \ln \frac{t}{2} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln \frac{t}{2} \rightarrow du = \frac{1/2}{t/2} dt = \frac{1}{t} dt \\ dv = t^5 dt \rightarrow v = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} \end{array} \right\} = \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \int \frac{t^6}{6} \frac{1}{t} dt = \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \int t^5 dt =$$

$$= \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{t^6}{6} = \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{t^6}{36}$$

$$\dots = 2 \left(\frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{t^6}{36} \right) = \frac{t^6}{3} \ln \frac{t}{2} - \frac{t^6}{18} = \frac{t^6}{3} \left(\ln \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \right) = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^2 \rightarrow \sqrt{x-1} = t \\ t^6 = (t^2)^3 = (x-1)^3 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + K$$

Como debe pasar por el punto $(5, -7/2)$ debe cumplirse que $F(5) = \frac{-7}{2}$.

$$F(x) = \frac{(x-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + K \quad \left. \begin{array}{l} F(5) = \frac{-7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-7}{2} = \frac{(5-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{5-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-7}{2} = \frac{4^3}{3} \left(\ln 1 - \frac{1}{6} \right) + K \Rightarrow \frac{-7}{2} = -\frac{64}{18} + K \Rightarrow \frac{-7}{2} = \frac{-64}{18} + K \Rightarrow \boxed{K = \frac{-7}{2} + \frac{64}{18} = \frac{1}{18}}$$

La primitiva buscada tiene la expresión $F(x) = \frac{(x-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{18}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (1 \ y \ z)$ y $C = (3 \ 0 \ 0)$.

- a) [1 punto] Sabiendo que el determinante de A es 5, calcula $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, indicando las propiedades que utilizas.
- b) [1,5 puntos] Calcula los valores $(x \ y \ z)$ tales que $B \cdot A = C$.

a) Sabemos que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$. Calculamos el determinante pedido.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{La primera fila tiene una diferencia de elementos} \\ \text{el determinante es diferencia de dos determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{El segundo determinante tiene dos filas iguales} \\ \text{por lo que su determinante vale cero} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Resto a la 3ª fila la 2ª} \\ \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \end{array} \\ \text{el determinante no cambia de valor} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambio las filas 2ª y 3ª} \\ \text{el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -|A| = -5$$

b) Resolvemos la ecuación matricial $B \cdot A = C$.

$$B \cdot A = C \Rightarrow (1 \ y \ z) \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3 \ 0 \ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3y+z \ y+0+z \ z+2y+z) = (3 \ 0 \ 0) \Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \rightarrow \boxed{z=-y} \end{cases} \Rightarrow x+3y-y=3 \Rightarrow x+2y=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3-2y} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a) **[1,75 puntos]** Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.
 b) **[0,75 puntos]** Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible.

a) Obtenemos la expresión del sistema que se nos plantea.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 3z = mx \\ 2x - 2z = my \\ 3x - 2y - z = mz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 3z - mx = 0 \\ 2x - 2z - my = 0 \\ 3x - 2y - z - mz = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5-m)x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y + (-m-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema que se nos plantea es un sistema homogéneo que siempre es compatible. Será indeterminado cuando el rango de la matriz de coeficientes sea menor de 3, es decir, cuando su determinante sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{vmatrix} = \{Columna 3^a + Columna 1^a\} = \begin{vmatrix} 5-m & -2 & 2-m \\ 2 & -m & 0 \\ 3 & -2 & 2-m \end{vmatrix} =$$

$$= \{Fila 1^a - Fila 3^a\} = \begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 2 & -m & 0 \\ 3 & -2 & 2-m \end{vmatrix} = (2-m)(-m)(2-m) = -m(2-m)^2$$

Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$\begin{vmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m(2-m)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 2-m = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado cuando $m = 0$ o $m = 2$.

- b) Hemos visto en el apartado anterior que para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos la expresión de sus soluciones.

$$\begin{cases} (5-m)x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y + (-m-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{Ecuación 1^a = Ecuación 3^a\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 3z = 2y \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - (3x - 3z) - 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3x + 3z - 2z = 0 \Rightarrow -x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z} \Rightarrow 2y = 3z - 3z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$, siendo λ cualquier número real.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = y + a = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y=3a \\ x+z=2 \end{cases}$.

a) [1,25 puntos] Calcula a para que las rectas se corten.

b) [1,25 puntos] Para $a = -1$, halla la recta que corta perpendicularmente a r y s .

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y+a}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -a, -1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2y=3a \\ x+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+3a \\ x+z=2 \end{cases} \Rightarrow 2y+3a+z=2 \Rightarrow \boxed{z=2-3a-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3a+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-3a-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 1, -2) \\ Q_s(3a, 0, 2-3a) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{matrix} P_r(0, -a, -1) \\ Q_s(3a, 0, 2-3a) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (3a, 0, 2-3a) - (0, -a, -1) = (3a, a, 3-3a)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (2, 1, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (3a, a, 3-3a) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3a & a & 3-3a \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 3a - 6a + 4a - \cancel{6a} - 6 + \cancel{6a} + 2a = -3 - 3a$$

Para que las rectas se corten el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ debe valer cero.

$$\left. \begin{matrix} [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = -3 - 3a \\ [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -3 - 3a = 0 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Las rectas se cortan cuando $a = -1$.

b) Para $a = -1$ las rectas tienen los siguientes vectores directores:

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 1, -2) \\ Q_s(-3, 0, 5) \end{cases}$$

Para este valor hemos comprobado que las rectas se cortan. La recta que corta perpendicularmente ambas rectas pasa por el punto de corte de ambas rectas y tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

Hallamos el punto A de corte de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2(1 + \lambda) = -3 \\ \lambda - 1 + 2\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2 - 2\lambda = -3 \\ 3\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1, 2, 1)}$$

Hallamos el vector director de la recta t perpendicular a r y s .

$$\begin{aligned} \vec{w}_t &= \vec{v}_s \times \vec{u}_r = (2, 1, -2) \times (1, 1, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2i - 2j + 2k - k - 4j + 2i = 4i - 6j + k = (4, -6, 1) \end{aligned}$$

Hallamos la ecuación de la recta t .

$$\begin{cases} \vec{w}_t = (4, -6, 1) \\ A(1, 2, 1) \in t \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 6\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

La recta que corta perpendicularmente a r y s tiene ecuación $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 6\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$, siendo

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (1, a, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1, a)$.

- a) [1 punto] Calcula a para que ambos vectores formen un ángulo de $\pi/3$ radianes.
 b) [1,5 puntos] Calcula a para que el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$.

a) Utilizamos la fórmula del producto escalar.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(1, a, 2)(-2, 1, a)}{\sqrt{1^2 + a^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + a^2}} = \frac{-2 + a + 2a}{\sqrt{5 + a^2} \sqrt{5 + a^2}} = \frac{3a - 2}{5 + a^2}$$

El ángulo debe ser de $\pi/3$ radianes = 60° entonces el $\cos 60^\circ = 1/2$.

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3a - 2}{5 + a^2} \\ (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} \text{ radianes} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3a - 2}{5 + a^2} \Rightarrow 5 + a^2 = 6a - 4 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Para $a = 3$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de $\pi/3$ radianes.

b) Determinamos la expresión del vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, a, 2) \\ \vec{v} = (-2, 1, a) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & 2 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 i - 4j + k + 2ak - aj - 2i =$$

$$= (a^2 - 2)i + (-4 - a)j + (1 + 2a)k = (a^2 - 2, -4 - a, 1 + 2a)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v} = (a^2 - 2, -4 - a, 1 + 2a) - (-2, 1, a) = (a^2, -5 - a, 1 + a)$$

Para que el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ su producto escalar debe ser nulo.

$$[(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}] \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a^2, -5 - a, 1 + a)(1, a, 2) = 0 \Rightarrow a^2 + a(-5 - a) + 2(1 + a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2} - 5a - \cancel{a^2} + 2 + 2a = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

El valor buscado es $a = \frac{2}{3}$.