

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Escribimos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Un extremo local en $x = 0$ exige $f'(0) = 0$, mientras que el punto de inflexión $(1, 0)$ exige $f(1) = 0$ y $f''(1) = 0$. Además, la pendiente de la tangente en ese punto es $f'(1) = -3$. Las derivadas son

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Aplicamos sucesivamente las condiciones:

$$f'(0) = c = 0, \quad f''(1) = 6a + 2b = 0 \implies b = -3a,$$

$$f'(1) = 3a + 2b + c = -3 \implies -3a = -3 \implies a = 1.$$

Así, $b = -3$ y la condición $f(1) = a + b + c + d = 0$ da $d = 2$. Por tanto,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

La condición de extremo se cumple, pues $f'(0) = 0$ y $f''(0) = -6 \neq 0$; en concreto, es un máximo local.

Opción A - Ejercicio 2

Los puntos de corte entre $y = -x^2 + ax$ y $y = x$ satisfacen

$$-x^2 + ax = x \iff x(x - (a - 1)) = 0.$$

Como $a > 1$, los cortes son $x = 0$ y $x = a - 1$, y la parábola queda por encima de la recta entre ellos. El área es la integral de la diferencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{a-1} ((-x^2 + ax) - x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a-1}{2}x^2 \right]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^3}{6}. \end{aligned}$$

Imponemos el área indicada en el enunciado:

$$\frac{(a-1)^3}{6} = \frac{4}{3} \implies (a-1)^3 = 8.$$

Como $a > 1$, se toma la raíz positiva $a - 1 = 2$, y por tanto $a = 3$.

Opción A - Ejercicio 3

a) Si $\det A \neq 0$, el sistema tiene solución única. Calculamos

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 15 = (\alpha - 3)(\alpha - 5).$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado para

$$\alpha \neq 3, 5.$$

b) Solo puede haber incompatibilidad en $\alpha = 3$ o $\alpha = 5$. Para $\alpha = 3$, la tercera fila de A es la primera más dos veces la segunda; los términos independientes verifican la misma relación ($3 = 1 + 2 \cdot 1$). El sistema es compatible. Para $\alpha = 5$, las filas cumplen $3F_1 + 14F_2 - 5F_3 = 0$ en la matriz de coeficientes, pero los términos independientes dan $3 \cdot 1 + 14 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 30 \neq 0$. La matriz ampliada tiene rango mayor que la de coeficientes, por lo que el sistema es incompatible. Así,

$$\text{no hay solución para } \alpha = 5.$$

c) Para $\alpha = 3$, las dos primeras ecuaciones independientes son

$$3x + 2y - z = 1, \quad y + 2z = 1.$$

La tercera es combinación de estas dos, así que quedan dos incógnitas libres. Tomando $z = t$, obtenemos $y = 1 - 2t$ y, al sustituir en la primera,

$$3x + 2(1 - 2t) - t = 1 \implies x = \frac{5t - 1}{3}.$$

Por consiguiente, para $\alpha = 3$ hay infinitas soluciones:

$$(x, y, z) = \left(\frac{5t - 1}{3}, 1 - 2t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

a) Para el área del triángulo usamos la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que parten del mismo vértice. Desde B ,

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (9 - 1, -1 - 2, 2 + 3) = (8, -3, 5),$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (5 - 1, 0 - 2, -1 + 3) = (4, -2, 2).$$

Entonces,

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (4, 4, -4), \quad \mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} = \boxed{2\sqrt{3}}.$$

b) La recta r se expresa en forma paramétrica tomando $y = z = t$ y usando $x + y + 1 = 0$:

$$r : \begin{cases} x = -t - 1, \\ y = t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que ABC sea rectángulo en A , los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben ser perpendiculares. Con $A = (-t - 1, t, t)$,

$$\overrightarrow{AB} = (-t - 2, 2 - t, 3 + t), \quad \overrightarrow{AC} = (-t - 10, -1 - t, 2 - t).$$

Su producto escalar se reduce a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(t + 2)^2 = 0,$$

por lo que $t = -2$. El punto buscado es $A = (1, -2, -2)$.

Opción B - Ejercicio 1

La función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Al quitar el valor absoluto en cada semieje,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0, \\ x^2 - x, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) En $x = 0$ las derivadas laterales son

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 1) = -1.$$

No coinciden, luego f no es derivable en 0. Es derivable en el resto de $\mathbb{R}$.

b) En cada tramo el signo de la derivada determina el crecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0, \\ 2x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Los puntos que separan intervalos son $-\frac{1}{2}$, 0 y $\frac{1}{2}$. El signo de f' es negativo en $(-\infty, -\frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{2})$, y positivo en $(-\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Por tanto, f decrece en

$$\boxed{(-\infty, -\frac{1}{2}) \text{ y } (0, \frac{1}{2})}$$

y crece en

$$\boxed{(-\frac{1}{2}, 0) \text{ y } (\frac{1}{2}, +\infty)}.$$

c) En $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$, la derivada cambia de negativa a positiva, así que se alcanzan mínimos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

En $x = 0$, aunque la función no es derivable, pasa de creciente a decreciente y $f(0) = 0$, por lo que hay un máximo relativo. Los extremos son

$$\boxed{\text{mínimos } (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}); \quad \text{máximo } (0, 0).}$$

Opción B - Ejercicio 2

a) Calculamos primero la pendiente de la tangente a F en P . Como $F' = f$,

$$F'(2) = f(2) = \frac{2^2 + 1}{2^2(2 - 1)} = \frac{5}{4}.$$

La recta tangente que pasa por $P = (2, \ln 2)$ es

$$\boxed{y - \ln 2 = \frac{5}{4}(x - 2)}.$$

b) Descomponemos en fracciones simples para integrar:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x - 1}.$$

En cada intervalo del dominio, una primitiva tiene la forma

$$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x - 1| + C.$$

La condición $F(2) = \ln 2$ determina la constante en el intervalo $(1, +\infty)$:

$$-\ln 2 + \frac{1}{2} + 2\ln 1 + C = \ln 2 \implies C = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Así, en el intervalo que contiene al punto dado,

$$\boxed{F(x) = -\ln x + \frac{1}{x} + 2\ln(x - 1) + 2\ln 2 - \frac{1}{2}, \quad x > 1.}$$

El dominio original tiene tres intervalos, $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. La condición en $x = 2$ solo fija la constante del último; si se pide definir F en todo el dominio, en los otros dos intervalos la misma expresión admite constantes aditivas independientes.

Opción B - Ejercicio 3

a) La ecuación $AX - B = I$ se transforma en $AX = I + B$. Calculamos primero

$$I + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene determinante 2, así que es invertible. Su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por A^{-1} a la izquierda,

$$X = A^{-1}(I + B) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Usamos $\det(M^n) = (\det M)^n$ y la multiplicatividad del determinante:

$$\det((A^2 B^{-1})^{2015}) = (\det(A)^2 \det(B^{-1}))^{2015}.$$

Como $\det A = 2$ y $\det B = 4$, resulta

$$\det((A^2 B^{-1})^{2015}) = \left(\frac{2^2}{4}\right)^{2015} = \boxed{1}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r se puede escribir en forma paramétrica tomando $x = t$:

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = -t, \\ z = 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tomamos $R_0 = (0, 0, 1)$ en r y su vector director $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

a) La distancia de un punto P a una recta de punto R_0 y director $\vec{v}$ es

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{R_0 P} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Aquí $\overrightarrow{R_0 P} = P - R_0 = (1, 0, -2)$, y

$$\overrightarrow{R_0 P} \times \vec{v} = (-2, -2, -1).$$

Por tanto,

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}.$$

b) Un plano que contiene a r necesita un punto de la recta y un vector normal perpendicular tanto a su director $\vec{v}$ como al vector $\overrightarrow{R_0 P}$. Su producto vectorial proporciona ese normal:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{R_0 P} = (2, 2, 1).$$

Usando el punto $P = (1, 0, -1)$ en la ecuación punto-normal,

$$2(x - 1) + 2y + (z + 1) = 0 \implies \boxed{2x + 2y + z - 1 = 0}.$$