

Convocatoria extraordinaria de 2023

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

En el tramo $[-2, 0]$, $5x + 1$ es creciente y toma los valores -9 y 1 . En el tramo $(0, 2\pi]$,

$$f'(x) = e^x(\cos x - \sin x),$$

de modo que los puntos críticos satisfacen $\tan x = 1$: son $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$. El signo de f' pasa de positivo a negativo en $\pi/4$ y de negativo a positivo en $5\pi/4$. Por tanto, hay un máximo relativo $f(\pi/4) = e^{\pi/4}/\sqrt{2}$ y un mínimo relativo $f(5\pi/4) = -e^{5\pi/4}/\sqrt{2}$. En $x = 0$ ambos tramos crecen al atravesarlo, así que no hay extremo allí. Para los extremos absolutos comparamos también los extremos del intervalo: $f(-2) = -9$ y $f(2\pi) = e^{2\pi}$. Como $e^{5\pi/4}/\sqrt{2} > 9$ y $e^{2\pi} > e^{\pi/4}/\sqrt{2}$, el mínimo absoluto se alcanza en $5\pi/4$ y el máximo absoluto en 2π . En $x = \pi/2$, $f = 0$ y $f' = -e^{\pi/2}$. La recta tangente es

$$y = -e^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

Ejercicio 2

El dominio es $(0, \infty)$. Derivando el producto,

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x(\ln x + 2).$$

Los puntos críticos son $x = e^{-2}$ y $x = 1$. El signo de f' es positivo en $(0, e^{-2})$, negativo en $(e^{-2}, 1)$ y positivo en $(1, \infty)$. Así, hay un máximo relativo en $x = e^{-2}$, con valor $4e^{-2}$, y un mínimo relativo en $x = 1$, con valor 0 . Para los extremos absolutos usamos los límites en los extremos del dominio: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$. La función es no negativa. Por ello, su mínimo absoluto es $f(1) = 0$ y no tiene máximo absoluto.

Ejercicio 3

Una primitiva de $\ln x/x$ es $\frac{1}{2}(\ln x)^2$, pues la derivada de $(\ln x)^2$ es $2 \ln x/x$. Por tanto,

$$\int_a^1 \frac{\ln x}{x} dx + 2 = -\frac{1}{2}(\ln a)^2 + 2 = 0.$$

Se obtiene $(\ln a)^2 = 4$. Como $0 < a < 1$, $\ln a < 0$, luego $\ln a = -2$ y

$$a = e^{-2}.$$

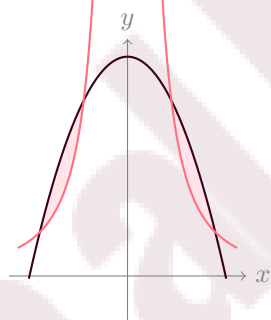
Ejercicio 4

Los cortes satisfacen $5 - x^2 = 4/x^2$. Multiplicando por x^2 (con $x \neq 0$) resulta

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0,$$

por lo que los puntos de corte son $(-2, 1)$, $(-1, 4)$, $(1, 4)$ y $(2, 1)$. Las curvas delimitan dos recintos acotados, simétricos, en $[1, 2]$ y $[-2, -1]$; el tramo entre -1 y 1 no delimita un área finita, porque $4/x^2$ diverge al acercarse a 0 . En $[1, 2]$, $5 - x^2$ está encima de $4/x^2$, así que

$$S = 2 \int_1^2 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx = 2 \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_1^2 = \frac{4}{3}.$$



Ejercicio 5

La matriz A de unos cumple $A^2 = 3A$. Sus valores propios son 3, 0, 0, así que $A - mI$ no es invertible cuando $m = 0$ o $m = 3$. En el apartado b), la condición de que $A - xI$ sea la inversa de $\frac{1}{x}(A - I)$ equivale a

$$(A - xI) \frac{1}{x}(A - I) = I, \quad x \neq 0.$$

Multiplicamos por x y usamos $A^2 = 3A$:

$$(A - xI)(A - I) = xI \implies A^2 - (1+x)A + xI = xI \implies (2-x)A = 0.$$

Como $A \neq 0$, $x = 2$. En efecto, $x \neq 0$ y $A - I$ y $A - 2I$ son invertibles, así que la condición se cumple. La respuesta es $\boxed{x = 2}$.

Ejercicio 6

Sean R, C, V los importes antes de impuestos de refrescos, cerveza y vino. El sistema que recoge el gasto total, la relación entre gastos y la factura con impuestos es

$$R + C + V = 500, \quad V = R + C - 60, \quad 1.06R + 1.12C + 1.30V = 592.4.$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene $V = 220$ y $R + C = 280$. Sustituyendo en la tercera,

$$1.06R + 1.12C = 306.4, \quad R = 280 - C,$$

por lo que $C = 160$ y $R = 120$. Incluidos los impuestos, los importes son $1.06R = 127.20$, $1.12C = 179.20$ y $1.30V = 286$. Por tanto, se invirtieron $\boxed{127.20 \text{ € en refrescos, } 179.20 \text{ € en cerveza y } 286 \text{ € en vino}}$.

Ejercicio 7

Los vectores normales de los planos son $n_1 = (1, -1, 1)$ y $n_2 = (1, 1, 0)$. Su intersección tiene como vector director

$$d = n_1 \times n_2 = (-1, 1, 2).$$

Un punto de la recta es $P_0 = (1, 1, 0)$, que satisface ambos planos. Para el punto dado, $P - P_0 = (1, 5, -2)$. La distancia de un punto a una recta se calcula como $\|(P - P_0) \times d\|/\|d\|$; aquí

$$(P - P_0) \times d = (12, 0, 6), \quad d(P, r) = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \boxed{\sqrt{30}}.$$

Además, $n_1 \cdot n_2 = 0$, así que los planos son perpendiculares y el ángulo es $\boxed{90^\circ}$.

Ejercicio 8

Un vector normal al plano que pasa por A, B, C se obtiene con

$$\overrightarrow{AB} = (3, 0, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 4), \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -6, 3).$$

Podemos tomar $n = (1, 2, -1)$. Usando $A = (0, 2, -2)$, la ecuación del plano es $x + 2y - z = 6$. Sus cortes con los ejes son $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, -6)$. El tetraedro con esos vértices y el origen tiene volumen

$$V = \frac{|6 \cdot 3 \cdot (-6)|}{6} = \boxed{18}.$$