

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo.

Ejercicio 1

La división polinómica da

$$\frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1} = ax + b + \frac{(a+1)x + (b-1)}{x^2 - 1}.$$

La asíntota oblicua es $y = ax + b$. Para que pase por $(0, 1)$ y sea paralela a $y = 2x$, debe ser $y = 2x + 1$, luego $a = 2$, $b = 1$. Para el apartado b), con $a = 0$, $b = 2$,

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \quad (x \neq 1, -3).$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable, ya que el límite es finito; en $x = -3$ la función tiende a infinito. La única asíntota vertical es $x = -3$.

Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R}$. Derivando dos veces,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2}.$$

Así, $f'' > 0$ si $x < -\pi$ y $f'' < 0$ si $x > -\pi$. Hay un punto de inflexión en $(-\pi, 0)$. Para el límite, escribimos $h = x + \pi$. Entonces $\arctan h \sim h$ y $\sin x = \sin(-\pi + h) = -\sin h \sim -h$. Por ello,

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctan(x + \pi)}{\sin x} = -1.$$

Ejercicio 3

Descomponemos la derivada racional:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} = 3 + \frac{8}{x-2} - \frac{4}{x+2}.$$

Como $x > 2$, una primitiva en el dominio es

$$f(x) = 3x + 8 \ln(x-2) - 4 \ln(x+2) + C.$$

La condición $f(3) = -4 \ln 5$ da $9 - 4 \ln 5 + C = -4 \ln 5$, luego $C = -9$. La función buscada es

$$f(x) = 3x + 8 \ln(x-2) - 4 \ln(x+2) - 9.$$

Ejercicio 4

Buscamos una primitiva de $(x^2 - 3x + 5)e^x$ de la forma $e^x P(x)$. Se comprueba que $P(x) = x^2 - 5x + 10$ cumple $P + P' = x^2 - 3x + 5$. Por tanto, la familia de primitivas es $e^x(x^2 - 5x + 10) + C$. La condición $f(0) = 5$ impone $C = -5$ y queda

$$f(x) = e^x(x^2 - 5x + 10) - 5.$$

Ejercicio 5

Una matriz A^2 es invertible exactamente cuando A lo es, porque $\det(A^2) = (\det A)^2$. Para la matriz del enunciado,

$$\det A = 1 - m,$$

por lo que A^2 tiene inversa si $m \neq 1$. Para $m = 0$, A es invertible y la ecuación queda $A^2X = (A + B)/2$. Multiplicando por A^{-2} ,

$$X = \begin{pmatrix} -15 & -13/2 & -77/2 \\ 0 & 5/2 & 2 \\ 19/2 & 13/2 & 53/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Sean h, d, u las cifras de centenas, decenas y unidades. El número y el intercambiado difieren en $99(h - u) = 198$, por tanto $h - u = 2$. La suma de las cifras impone $h + d + u = 9$, y la suma de los dos números da

$$101(h + u) + 20d = 828.$$

Combinando la última igualdad con $d = 9 - (h + u)$ se obtiene $h + u = 8$ y $d = 1$. Así, $h = 5$, $u = 3$, y el número es $\boxed{513}$.

Ejercicio 7

El vector $PQ = Q - P = (2, -2, 0)$ es normal al plano mediador, que pasa por el punto medio $M = (2, -1, 1)$. Así,

$$(x - 2) - (y + 1) = 0 \implies \boxed{x - y - 3 = 0}.$$

La recta del enunciado tiene director $(-1, 3, 1)$. El plano pedido debe contener ese director y PQ ; su normal es su producto vectorial, proporcional a $(-1, -1, 2)$. Al pasar por $P = (1, 0, 1)$, queda

$$\boxed{x + y - 2z + 1 = 0}.$$

Ejercicio 8

Los vectores $AB = B - A = (0, -1, -1)$ y $AC = C - A = (0, -2, 0)$ tienen producto vectorial $(-2, 0, 0)$, de módulo 2. El área es la mitad: $\boxed{1}$. Para completar el paralelogramo con vértices consecutivos A, B, C, D , se cumple $D = A + C - B$, de modo que

$$\boxed{D = (1, 0, 3)}.$$