

PROBLEMA A.1. Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular las matrices $(A - I)^2$ y $A(A - 2I)$. (4 puntos)
- b) Justificar razonadamente que
- b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A - 2I$. (2 puntos)
- b.2) No existe la matriz inversa de la matriz $A - I$. (2 puntos)
- c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$. (2 puntos)

Solución:

a) Cálculo de $(A - I)^2$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2-3 & 1+2-3 & 1+2-3 \\ 2+4-6 & 2+4-6 & 2+4-6 \\ -3-6+9 & -3-6+9 & -3-6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - I)^2$ es la matriz nula.

Cálculo de $A(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Para que exista la matriz inversa, el determinante de la matriz debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 6 - 6 + 9 + 12 + 4 = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 3 + 8 = -1 \neq 0 \rightarrow \exists (A - 2I)^{-1}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (\text{como } F_2 = 2F_1) = 0 \quad \text{Por lo tanto no existe la inversa de la matriz } A - I.$$

c) Buscamos el valor de $\lambda / A^{-1} = \lambda (A - 2I)$

Multiplicando la expresión anterior por la matriz A por la izquierda,

$$A A^{-1} = A \lambda (A - 2I)$$

como λ es un número real, $A \lambda = \lambda A$

$$I = \lambda A (A - 2I)$$

la matriz $A (A - 2I)$ la hemos calculado en el apartado a), planteamos la igualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1$$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA A.2. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r: \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases}$$

se pide:

- Justificar que las rectas r y s se cruzan. (4 puntos)
- Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s . (3 puntos)
- Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s . (3 puntos)

Solución:

a) Para comprobar que las rectas r y s se cruzan calculemos punto y vector director de cada una de ellas.

$$r: \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Punto } x=0 &\rightarrow \begin{cases} y - z = 4 \\ -2y - z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - z = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases} \rightarrow \\ &\quad \text{sumando ambas ecuaciones} \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3 \\ &\quad \text{sustituyendo en I}^a \rightarrow 3 - z = 4 \rightarrow z = -1 \end{aligned}$$

$$P_r(0, 3, -1)$$

$$\begin{aligned} \text{vector director } \vec{v}_r &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(-1-2) - \vec{j}(-5+2) + \vec{k}(-10-2) = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 12\vec{k} = (-3, 3, -12) \end{aligned}$$

$$\text{luego } \vec{v}_r(-1, 1, -4)$$

$$s: \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Punto } x=0 \rightarrow \begin{cases} -y = -5 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow P_s(0, 5, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{vector director } \vec{v}_s &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k} = \\ &= -\vec{i} - \vec{j} = (-1, -1, 0) \end{aligned}$$

$$\text{luego } \vec{v}_s(1, 1, 0)$$

Procedamos a comprobar que las rectas se cruzan. Vamos a realizar los cálculos de dos formas distintas.
Primera forma.

$$\vec{v}_r(-1,1,4) \text{ y } \vec{v}_s(1,1,0) \quad \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \rightarrow \text{no son paralelos}$$

Veamos si las rectas se cortan, para ello resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones que definen las rectas,

$$\begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \\ x - y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + y - 4 = 4 \\ 2x - 2y - 4 = -5 \\ x - y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - 2y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

La segunda y tercera ecuaciones son incompatibles, coeficientes de incógnitas proporcionales pero no los términos independientes, por lo tanto el sistema no tiene solución.

Rectas con vectores directores no paralelos y que no se cortan, las rectas r y s se cruzan.

Segunda forma.

Estudiar y comparar los rangos de las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \vec{P_r P_s} \end{pmatrix}$$

$$\vec{P_r P_s} = (0,5,4) - (0,3,-1) = (0,2,5)$$

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{en } M \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \\ \text{en } M' \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 8 - 5 = -18 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se cruzan}$$

b) $d(r,s)$

Como las rectas r y s se cruzan podemos calcular la distancia entre ellas mediante la expresión:

$$d(r,s) = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \vec{P_r P_s} \end{bmatrix} \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|}$$

$$\left| \begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \vec{P_r P_s} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right| = (\text{calculado en el apartado anterior}) = |-18| = 18$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} = (4, -4, -2)$$

$$\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{Finalmente } d(r,s) = \frac{18}{6} = 3 \text{ u. l.}$$

También podemos calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan de esta otra forma.

Vamos a buscar un punto de la recta r y otro punto de la recta s de forma que el vector que forman estos dos puntos sea perpendicular a las dos rectas, de esta forma la distancia entre las dos rectas será la distancia entre esos dos puntos.

Sea P un punto cualquiera de r ,

$$r: \begin{cases} P_r(0,3,1) \\ \vec{v}_r(-1,1,-4) \end{cases} \rightarrow P(-\lambda, 3+\lambda, 1-4\lambda)$$

Sea Q un punto cualquiera de s ,

$$s: \begin{cases} P_s(0,5,4) \\ \vec{v}_s(1,1,0) \end{cases} \rightarrow Q(\mu, 5+\mu, 4)$$

$$\text{Luego } \overrightarrow{PQ} = (\mu + \lambda, \mu - \lambda + 2, 4\lambda + 5)$$

Buscamos los valores de λ y μ de forma que $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_s$

$$\begin{cases} (\mu + \lambda, \mu - \lambda + 2, 4\lambda + 5) \cdot (-1, 1, -4) = 0 \\ (\mu + \lambda, \mu - \lambda + 2, 4\lambda + 5) \cdot (1, 1, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\mu - \lambda + \mu - \lambda + 2 - 16\lambda - 20 = 0 \\ \mu + \lambda + \mu - \lambda + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -18\lambda - 18 = 0 \\ 2\mu + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } \lambda = -1 \rightarrow P_0(1, 2, 3)$$

$$\text{Para } \mu = -1 \rightarrow Q_0(-1, 4, 4)$$

$$\text{Finalmente, } d(r, s) = d(P_0, Q_0) = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

c) Ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s .

La ecuación de este plano vamos a obtenerla de dos formas, análogamente a lo realizado en los apartados anteriores.

Primera forma.

$$\text{Como } \pi \parallel r \text{ y } s \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (4, -4, -2) \quad (\text{del apartado b)})$$

Luego el plano π paralelo a r y s tiene por ecuación: $4x - 4y - 2z + D = 0$ y debe cumplir que $d(\pi, r) = d(\pi, s)$

$$\text{Como } \pi \parallel r \rightarrow d(\pi, r) = d(\pi, P_r) = \frac{|4 \cdot 0 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + D|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-10 + D|}{6}$$

$$P_r(0, 3, -1)$$

$$\text{Como } \pi \parallel s \rightarrow d(\pi, s) = d(\pi, P_s) = \frac{|4 \cdot 0 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + D|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-28 + D|}{6}$$

$$P_s(0, 5, 4)$$

$$\text{Igualando las distancias } \frac{|-10 + D|}{6} = \frac{|-28 + D|}{6} \rightarrow |-10 + D| = |-28 + D| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -10 + D = -28 + D \rightarrow -10 = -28 \quad \text{No tiene solución} \\ -10 + D = -(-28 + D) \rightarrow -10 + D = 28 - D \rightarrow 2D = 38 \rightarrow D = 19 \end{cases}$$

$$\text{El plano } \pi \text{ será: } 4x - 4y - 2z + 19 = 0$$

Segunda forma.

Considerando el proceso de resolución del apartado b), en la segunda forma, el plano π pasará por el punto medio del segmento de extremos P_0 y Q_0 y sus vectores directores serán los de las rectas r y s ,

$$P_M = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+4}{2} \right) = \left(0, 3, \frac{7}{2} \right)$$

La ecuación del plano π la obtenemos de la siguiente forma,

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-\frac{7}{2} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-3) \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \left(z - \frac{7}{2} \right) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - (y-3)4 + \left(z - \frac{7}{2} \right)(-2) = 0$$

$$4x - 4y + 12 - 2z + 7 = 0$$

$$4x - 4y - 2z + 19 = 0$$

El plano π será: $4x - 4y - 2z + 19 = 0$

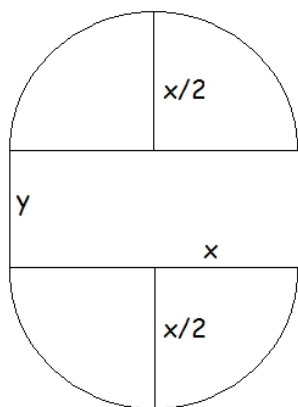
Tu Prof te al Rescate

PROBLEMA A.3. Se quiere construir un estadio vallado de 1000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x , de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

- La longitud del perímetro del campo en función de x . (3 puntos)
- El coste $f(x)$ de la valla en función de x . (3 puntos)
- El valor de x para el que el coste de la valla es mínimo. (4 puntos)

Solución:

La forma del estadio vallado será,



- a) El perímetro a vallar medirá: $2y + 2\pi \frac{x}{2} = 2y + \pi x$

Para poder expresar el perímetro en función de x , hay que buscar la relación entre x e y .

La relación la obtendremos a partir del valor de la superficie del estadio (10000 m^2)

El estadio está formado por un rectángulo y dos semicírculos,

- rectángulo de lados x e $y \rightarrow A_R = xy$

- dos semicírculos de radio $x/2 \rightarrow A_{SC} = (1/2)\pi (x/2)^2 = (1/2)\pi (x^2/4) = \pi x^2/8$

el área de los dos semicírculos será: $2\pi x^2/8 = \pi x^2/4$

$$\text{Área del estadio} = xy + \frac{\pi}{4}x^2$$

Luego $10000 = xy + \frac{\pi}{4}x^2$ despejemos y

$$10000 - \frac{\pi}{4}x^2 = xy \rightarrow y = \frac{10000 - \frac{\pi}{4}x^2}{x} = \frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x$$

Finalmente, $P(x) = 2\left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x\right) + \pi x = \frac{20000}{x} - \frac{\pi}{2}x + \pi x = \frac{20000}{x} + \frac{\pi}{2}x$

- b) Coste de la valla,

$$f(x) = 1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x\right) + 2\pi x = \frac{20000}{x} - \frac{\pi}{2}x + 2\pi x = \frac{20000}{x} + \frac{3\pi}{2}x$$

- c) x / coste de la valla sea mínimo

Debemos buscar el mínimo de $f(x) = \frac{20000}{x} + \frac{3\pi}{2}x$

Previamente nos interesa conocer el dominio de $f(x)$. Como x representa la longitud del lado de un rectángulo debe ser un número positivo. Además, en la definición de la función la x está en el denominador (no puede ser 0). Por lo tanto $\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{-20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2}$$

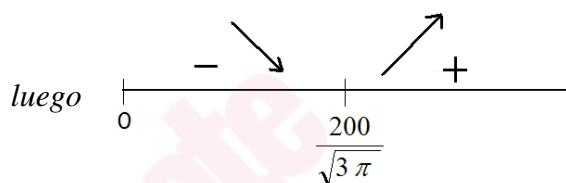
Estudiamos el signo de $f'(x)$,

$$\frac{-20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2} = 0 \rightarrow \frac{20000}{x^2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x^2 = \frac{40000}{3\pi} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{40000}{3\pi}} = \pm \frac{200}{\sqrt{3\pi}} \begin{cases} x_1 = \frac{200}{\sqrt{3\pi}} \approx 65'1470 \\ x_2 = \frac{-200}{\sqrt{3\pi}} \notin \text{Dom } f(x) \end{cases}$$

Representamos en la recta real el dominio de $f(x)$ y el valor de x obtenido anteriormente y estudiamos el signo de $f'(x)$ en los dos intervalos que obtenemos,

x	$f'(x)$
1	$\frac{-20000}{1^2} + \frac{3\pi}{2} = -19995'2876 < 0$
100	$\frac{-20000}{100^2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{-20000}{10000} + \frac{3\pi}{2} = -2 + \frac{3\pi}{2} = 2'7124 > 0$



Por lo que el mínimo relativo se alcanza para $x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}}$ que además es el mínimo absoluto puesto que la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.

Solución: el coste de la valla es mínimo para $x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}} \approx 65'147 \text{ m}$

PROBLEMA B.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros a , b y c

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

se pide:

- Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$ el sistema es incompatible. (3 puntos)
- Determinar razonadamente los valores de los parámetros a , b y c , para los que se verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema. (4 puntos)
- Justificar si la solución $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única. (3 puntos)

Solución:

- a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$ el sistema es incompatible.

Para estos valores de los parámetros el sistema queda:

$$\begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$$

Ahora podemos proceder a estudiar este sistema o fijarnos en la primera y tercera ecuaciones que tienen proporcionales los coeficientes de las incógnitas pero no los términos independientes. Veámoslo,

$$\begin{cases} -y + z = 6 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} &= -2 + 2 = 0 \\ |2| &= 2 \neq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{rang}(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A') = 2$$

Sistema Incompatible

Por lo tanto, como la 1ª y 3ª ecuaciones son incompatible el sistema inicial también es incompatible.

- b) ¿ a , b y c ? / $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ sea solución del sistema.

Dando a las incógnitas los valores indicados, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

Estudiemos este nuevo sistema cuyas incógnitas son a , b y c .

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & -6 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes, A . A es una matriz 3×3 , luego su máximo rango posible es 3.

$$|2| = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 12 - 60 - 60 + 48 + 6 = -78 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Como el máximo rango posible de A' (que es 3×4) es también 3, entonces $\text{rang}(A') = 3$

Por lo que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

La solución del sistema será:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{36 + 36 - 48 - 48 - 72 + 18}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-18 + 12 + 90 - 45 + 48 - 9}{-78} = \frac{78}{-78} = -1$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-32 + 12 - 30 - 60 + 8 + 24}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

Finalmente, $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema para $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$.

c) Estudiamos el sistema para estos valores de los parámetros $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$ obtenidos anteriormente.

El sistema que queda es:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes, A . A es matriz 3×3 , luego su máximo rango posible es 3.

$$|2| = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 + 3) = -7 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Como el máximo rango posible de A' (A' es 3×4) es 3, entonces $\text{rang}(A') = 3$

Por lo que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Por tanto la solución $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es única.

PROBLEMA B.2. Sea r la recta de vector director $(2, -1, 1)$ que pasa por el punto $P = (0, 3, -1)$. Se pide:

- Hallar razonadamente la distancia del punto $A = (0, 1, 0)$ a la recta r . (4 puntos)
- Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P . (4 puntos)
- Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación $z = 0$, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q . (2 puntos)

Solución:

De la recta r conocemos un punto y su vector director, es decir:

$$r: \begin{cases} P_r(0, 3, -1) \\ \vec{v}_r(2, -1, 1) \end{cases}$$

a) $d(A, r)$ siendo $A(0, 1, 0)$

$$d(A, r) = \frac{|\vec{P_r A} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

$$\vec{P_r A} = (0, 1, 0) - (0, 3, -1) = (0, -2, 1)$$

$$\vec{P_r A} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} = (-1, 2, 4)$$

$$|\vec{P_r A} \times \vec{v}_r| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$d(A, r) = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{21}{6}} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ u. l.}$$

b)

$$\text{Ángulo entre } \begin{cases} r \rightarrow \vec{v}_r(2, -1, 1) \\ s \begin{cases} P(0, 3, -1) \\ A(0, 1, 0) \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (0, 3, -1) - (0, 1, 0) = (0, 2, -1) \end{cases}$$

$$\text{siendo } \alpha = \left(\begin{smallmatrix} \wedge \\ r, s \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{|(2, -1, 1) \cdot (0, 2, -1)|}{\sqrt{6} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 - 1|}{\sqrt{6} \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{30}} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 56'7891^\circ \\ \alpha_2 = 303'2109^\circ \end{cases}$$

pero como α es el ángulo entre dos rectas ($\alpha \leq 90^\circ$) entonces $\alpha = 56'7891^\circ$

c) $Q = r \cap \{z = 0\}$

Obtengamos el punto Q ,

$$r: \begin{cases} P_r(0, 3, -1) \\ \vec{v}_r(2, -1, 1) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

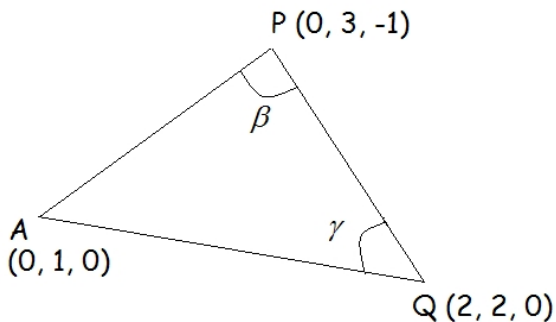
La intersección de esta recta con el plano $z = 0$ la obtenemos resolviendo la ecuación:

$$-1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

Por lo tanto el punto de corte será:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 1 = 2 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow Q(2, 2, 0)$$

El triángulo APQ será,



Los ángulos que tenemos que comprobar que son iguales son:

$$\beta = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}) \quad y \quad \gamma = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QP})$$

Cálculo de β ,

$$\overrightarrow{PA} = (0, 1, 0) - (0, 3, -1) = (0, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 2, 0) - (0, 3, -1) = (2, -1, 1)$$

$$\cos \beta = \frac{(0, -2, 1) \cdot (2, -1, 1)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2 + 1}{\sqrt{5} \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

Cálculo de γ ,

$$\overrightarrow{QA} = (0, 1, 0) - (2, 2, 0) = (-2, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{QP} = (0, 3, -1) - (2, 2, 0) = (-2, 1, -1)$$

$$\cos \gamma = \frac{(-2, -1, 0) \cdot (-2, 1, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4 - 1}{\sqrt{5} \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

Como $\cos \beta = \cos \gamma$ y β y γ son ángulos de un triángulo (β y $\gamma < 180^\circ$) entonces $\beta = \gamma$, que es lo que queríamos comprobar.

PROBLEMA B.3. Dada la función polinómica $f(x) = 4 - x^2$, se pide obtener razonadamente:

- La gráfica de la curva $y = 4 - x^2$. (2 puntos)
- El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x + y = 0$. (3 puntos)
- Las rectas que pasan por el punto $(-2, 1)$ y son tangentes a la curva $y = 4 - x^2$, obteniendo los puntos de tangencia. (5 puntos)

Solución:

a) Gráfica de $y = 4 - x^2$

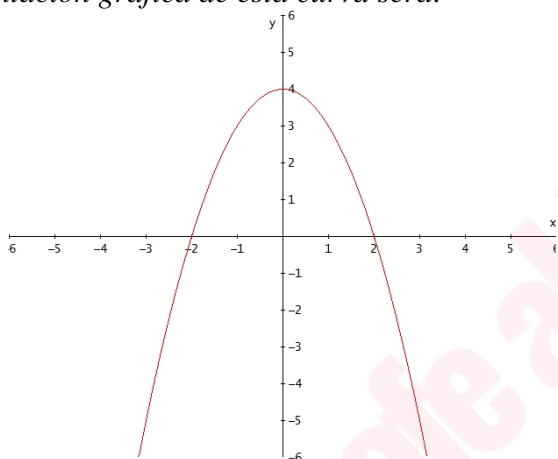
Esta función es un polinomio de segundo grado, gráficamente es una parábola. Para representarla basta con calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

Corte con el eje OX $\rightarrow x = 0, y = 4 - 0^2 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Corte con el eje OY $\rightarrow y = 0, 0 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (2, 0)$ y $(-2, 0)$

Vértice $x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} = 0 \rightarrow (0, 4)$

La representación gráfica de esta curva será:



Otra forma de obtener la gráfica de esta curva sería mediante su estudio. Veámoslo,

$$y = 4 - x^2$$

Es una función polinómica por lo tanto su dominio es el conjunto de los números reales y no tiene asíntotas. Las ramas las estudiaremos si es necesario.

Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte,

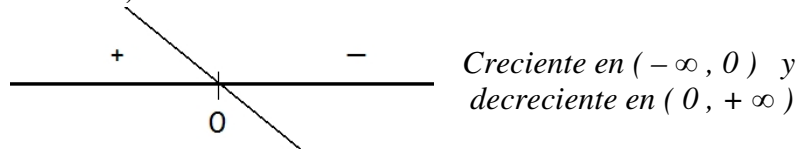
Corte con el eje OX $\rightarrow x = 0, y = 4 - 0^2 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Corte con el eje OY $\rightarrow y = 0, 0 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (2, 0)$ y $(-2, 0)$

Monotonía,

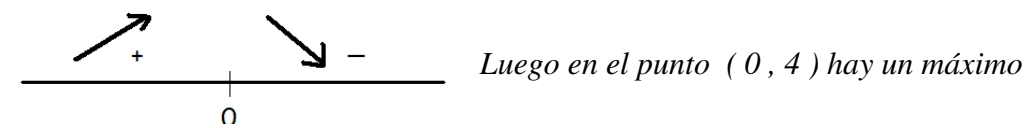
$$y' = -2x;$$

$$-2x = 0; \quad x = 0$$



Máximos-Mínimos

Del estudio anterior obtenemos que,



La representación gráfica de esta curva será la realizada anteriormente.

b) Buscamos un punto $P \in \{y = 4 - x^2\} / \{ \text{recta tangente a } y \text{ en } P \} \perp \{x + y = 0\}$

Sea $P(a, b)$, la recta tangente a la curva en este punto tiene por pendiente $y'_{x=a}$

$$y' = -2x \rightarrow y'_{x=a} = -2a$$

La pendiente de la recta $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ es -1

Como las dos rectas deben ser perpendiculares, el producto de sus pendientes será -1 , luego

$$(-2a) \cdot (-1) = -1; \quad 2a = -1; \quad a = -1/2$$

Calculemos la ordenada del punto P ,

$$a = \frac{-1}{2} \rightarrow b = 4 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Por lo tanto el punto P buscado será el $\left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{4}\right)$

c) Rectas tangentes a la curva $\{y = 4 - x^2\}$ que pasan por $(-2, 1)$

Sea $(a, 4 - a^2)$ el punto de tangencia entre la recta y la parábola.

Como la recta debe pasar por los puntos $(-2, 1)$ y $(a, 4 - a^2)$, la pendiente de esta recta será:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - a^2 - 1}{a - (-2)} = \frac{3 - a^2}{a + 2}$$

Como la recta debe ser tangente a la parábola en el punto $(a, 4 - a^2)$, la pendiente de esta recta debe ser:

$$y'_{x=a}, \text{ como } y' = -2x \rightarrow y'_{x=a} = -2a$$

Por lo tanto:

$$\frac{3 - a^2}{a + 2} = -2a \rightarrow 3 - a^2 = -2a^2 - 4a \rightarrow a^2 + 4a + 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4 + 2}{2} = -1 \\ \frac{-4 - 2}{2} = -3 \end{cases}$$

Los puntos de tangencia, $(a, 4 - a^2)$, serán:

$$\text{para } a = -1 \rightarrow (-1, 4 - (-1)^2) = (-1, 3)$$

$$\text{para } a = -3 \rightarrow (-1, 4 - (-3)^2) = (-3, -5)$$

Las rectas, que pasan por el punto $(-2, 1)$, serán:

$$\text{para } a = -1 \rightarrow m = -2(-1) = 2$$

$$y - 1 = 2(x - (-2))$$

$$y - 1 = 2(x + 2)$$

$$y - 1 = 2x + 4$$

$$y = 2x + 5$$

$$\text{para } a = -3 \rightarrow m = -2(-3) = 6$$

$$y - 1 = 6(x - (-2))$$

$$y - 1 = 6(x + 2)$$

$$y - 1 = 6x + 12$$

$$y = 6x + 13$$

Solución:

$$\text{recta } y = 2x + 5 \quad \text{y punto de tangencia } (-1, 3)$$

$$\text{recta } y = 6x + 13 \quad \text{y punto de tangencia } (-3, -5)$$