

Modelo 2 de 2008

Se estudian continuidad y derivabilidad, áreas, discusión de sistemas y geometría de rectas y planos.

Opción A - Ejercicio 1

Para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$, la unión de las dos ramas en $x = 2$ debe ser continua y tener derivadas laterales iguales. La continuidad en $x = 2$ exige que coincidan los valores de ambas ramas. Como la rama derecha vale $4 - 2b - 4 = -2b$, resulta

$$4a + 6 = -2b, \quad 2a + b = -3.$$

Las derivadas laterales en 2 son $4a + 3$ y $4 - b$. La igualdad de estas pendientes da

$$4a + 3 = 4 - b, \quad 4a + b = 1.$$

Restando las ecuaciones $4a + b = 1$ y $2a + b = -3$, obtenemos $2a = 4$, así que $a = 2$ y $b = -7$. Por tanto, $a = 2, b = -7$.

Para $x > 2$, $f(x) = x^2 + 7x - 4$. En $x = 3$, $f(3) = 26$ y $f'(3) = 13$. La tangente tiene pendiente 13 y la normal, perpendicular a ella, pendiente $-1/13$:

$$\text{Tangente: } y - 26 = 13(x - 3),$$

$$\text{Normal: } y - 26 = -\frac{1}{13}(x - 3).$$

Opción A - Ejercicio 2

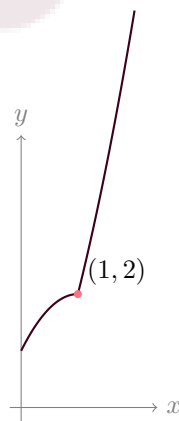
El valor absoluto cambia de expresión cuando $x^2 - 1 = 0$, es decir, en $x = 1$ dentro del intervalo $[0, 2]$. Por eso separamos la integral:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Así,

$$\int_0^2 g(x) dx = \left[x^2 + x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_1^2 = \frac{5}{3} + \frac{13}{3} = \boxed{6}.$$

La gráfica queda formada por las dos parábolas anteriores, que se unen en $(1, 2)$.



Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante para identificar los valores singulares:

$$\det A = -(a-1)(a-2).$$

Si $a \neq 1, 2$, $\det A \neq 0$, luego $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$, igual al número de incógnitas. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $a = 1$, las filas primera y tercera de A coinciden, pero sus términos independientes son 0 y 1. En efecto, las ecuaciones exigirían simultáneamente $x + y + z = 0$ y $x + y + z = 1$. El menor de orden 2 formado por las dos primeras columnas de las filas 1 y 2 vale -1 , así que $\operatorname{rg}(A) = 2$; la contradicción hace $\operatorname{rg}(A^*) = 3$. El sistema es incompatible.

Para $a = 2$, $\det A = 0$ y el menor anterior sigue siendo -1 , por lo que $\operatorname{rg}(A) = 2$. Además, la suma de las filas 2 y 3 es tres veces la fila 1, también en los términos independientes ($2 + 1 = 3$); por tanto $\operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es compatible indeterminado. Resolviendo queda $y = 0$, $x + z = 1$:

$$(x, y, z) = (1 - t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r pasa por $P = (1, 2, 3)$ y tiene vector director $\vec{u} = (1, -1, 1)$, pues $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + t$. La recta s es la intersección de dos planos con normales $(1, 0, -1)$ y $(0, 2, 1)$; por ello un vector director suyo es su producto vectorial:

$$\vec{v} = (1, 0, -1) \times (0, 2, 1) = (2, -1, 2).$$

El plano que contiene a r y es paralelo a s tiene como vectores directores $\vec{u}, \vec{v}$. Un vector normal es $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 0, 1)$. Usando P :

$$-1(x-1) + 0(y-2) + (z-3) = 0 \implies \pi_1 : x - z + 2 = 0.$$

Para $\pi_2 : x + y = 3$, sustituimos una parametrización de s : $x = t - 1$, $y = (3 - t)/2$, $z = t$. La condición $x + y = 3$ da $(t - 1) + (3 - t)/2 = 3$, luego $t = 5$ y el punto de corte es $(4, -1, 5)$. Así, s es secante a π_2 y la distancia entre ambos es $\boxed{0}$.

Opción B - Ejercicio 1

Sean $a, b > 0$ los cortes de la recta con los ejes positivos; el triángulo tiene área $S = ab/2$. La ecuación de la recta de interceptos es $x/a + y/b = 1$. Como pasa por $(1, 2)$,

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1.$$

Despejando $b = 2a/(a - 1)$, la positividad de b exige $a > 1$. El área en función de una variable es

$$S(a) = \frac{a^2}{a - 1}, \quad S'(a) = \frac{a(a - 2)}{(a - 1)^2}.$$

En $1 < a < 2$ la derivada es negativa y para $a > 2$ es positiva; por tanto hay un mínimo en $a = 2$. Entonces $b = 4$ y

$$S_{\min} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$$

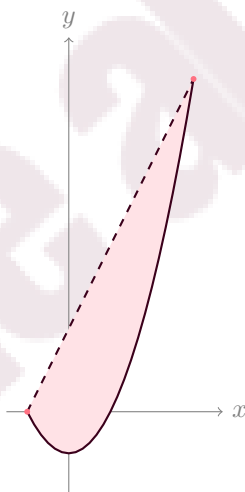
La recta buscada es $x/2 + y/4 = 1$, o $2x + y = 4$. **Opción B - Ejercicio 2**

Los puntos de corte de $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 2$ satisfacen

$$x^2 - 1 = 2x + 2 \iff (x - 3)(x + 1) = 0,$$

por lo que son $x = -1$ y $x = 3$. En ese intervalo la recta está por encima de la parábola (por ejemplo, en $x = 0$, $g(0) = 2 > -1 = f(0)$). El área es

$$\int_{-1}^3 (g(x) - f(x)) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}.$$



Opción B - Ejercicio 3

Para que la tercera ecuación no añada ninguna condición nueva, sus coeficientes y su término independiente deben ser la misma combinación lineal de las dos primeras ecuaciones. Buscamos α, β tales que

$$\alpha(2, -1, 3) + \beta(1, 2, -1) = (a, 1, 7), \quad \alpha + 2\beta = 7.$$

De las componentes segunda y tercera: $-\alpha + 2\beta = 1$ y $3\alpha - \beta = 7$. Se obtiene $\alpha = 3, \beta = 2$, de modo que $a = 2\alpha + \beta = 8$. En efecto, la tercera ecuación es tres veces la primera más dos veces la segunda.

Añadiendo $x + y + z = 1$, resolvemos las dos primeras:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y - z = 2, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

De $x + y + z = 1$ despejamos $x = 1 - y - z$. Al sustituir en las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$3y - z = 1, \quad y - 2z = 1.$$

Restando la segunda de la primera, $2y + z = 0$; resolviendo el sistema, $y = 1/5$ y $z = -2/5$. Entonces $x = 1 - y - z = 6/5$. Por tanto,

$$(x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right).$$

Opción B - Ejercicio 4

Tomamos $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 2)$ y $C = (1, -1, 1)$. Los vectores de dos lados son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 0, 2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, -2, 1).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 0, 0), \quad [ABC] = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Un plano perpendicular a la recta BC tiene por vector normal un vector director de esa recta. Calculamos

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, -2, -1).$$

El plano que pasa por A cumple $-2(y - 1) - z = 0$, es decir,

$$\pi : 2y + z - 2 = 0.$$